解答例

STEP I 1990、第 8 問

純粋数学 • 三角関数の無限積

> **STEP I 1990、問 8**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/90-s1-q8

鍵となる考え方

倍角の公式（double-angle formula）$\sin 2\theta = 2\sin\theta\cos\theta$ を用いると、各余弦は 2 つの正弦の比 $\cos\theta = \dfrac{\sin 2\theta}{2\sin\theta}$ に書き換えられる。このような比を掛け合わせると、望遠鏡和（telescoping sum）のように、ほとんどすべてが打ち消し合う。有限積が 1 つのすっきりした分数になってしまえば、$n \to \infty$ とするには、$x \to 0$ のとき $\dfrac{\sin x}{x} \to 1$ という標準的な極限（limit）さえあればよい。

解答

α に関する条件について

以下のすべての段階で、ある $m \geq 0$ に対して $\sin(\alpha/2^m)$ で割るので、これらが決して 0 にならないことが必要である。もし $\sin(\alpha/2^m) = 0$ ならば、ある整数 j に対して $\alpha/2^m = j\pi$ となり、$\alpha = (2^m j)\pi$ は π の整数倍となるが、これは除外されている。したがって、すべての $m \geq 0$ に対して $\sin(\alpha/2^m) \neq 0$ である。

2 つの余弦の積

$\sin 2\theta = 2\sin\theta\cos\theta$ を、まず $\theta = \alpha/2$、次に $\theta = \alpha/4$ として 2 回適用すると、

$$\begin{aligned}\sin\alpha &= 2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}\\ &= 2\left(2\sin\frac{\alpha}{4}\cos\frac{\alpha}{4}\right)\cos\frac{\alpha}{2} = 4\sin\frac{\alpha}{4}\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{4}.\end{aligned}$$

$\sin(\alpha/4) \neq 0$ であるから $4\sin(\alpha/4)$ で割ることができ、

$$\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{4} = \frac{\sin\alpha}{4\sin(\alpha/4)},$$

を得る。これが示すべきことであった。

n 個の余弦の積

$P_n = \cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{4}\cdots\cos\frac{\alpha}{2^n}$ とおく。n に関する数学的帰納法（induction）により、

$$P_n = \frac{\sin\alpha}{2^n\sin(\alpha/2^n)}.$$

が成り立つことを証明する。$n = 1$ のとき、これは $\cos\frac{\alpha}{2} = \frac{\sin\alpha}{2\sin(\alpha/2)}$ となり、倍角の公式を $2\sin(\alpha/2) \neq 0$ で割ったものにほかならない。（$n = 2$ の場合は、いま示した結果である。）

次に、ある $n \geq 1$ に対して公式が成り立つと仮定する。倍角の公式を $\theta = \alpha/2^{n+1}$ として用いると $\sin\frac{\alpha}{2^n} = 2\sin\frac{\alpha}{2^{n+1}}\cos\frac{\alpha}{2^{n+1}}$ となる。よって

$$\begin{aligned} P_{n+1} = P_n\cos\frac{\alpha}{2^{n+1}} &= \frac{\sin\alpha}{2^n\sin(\alpha/2^n)}\cos\frac{\alpha}{2^{n+1}} \\ &= \frac{\sin\alpha\,\cos(\alpha/2^{n+1})}{2^n\cdot 2\sin(\alpha/2^{n+1})\cos(\alpha/2^{n+1})} = \frac{\sin\alpha}{2^{n+1}\sin(\alpha/2^{n+1})}. \end{aligned}$$

$\cos(\alpha/2^{n+1})$ を約分してよいのは、これが 0 でない $\sin(\alpha/2^n)$ の因数であり、したがってそれ自身も 0 でないからである。これは $n+1$ に対する公式であるから、数学的帰納法により、すべての正の整数 n に対して公式が成り立つ。

$n \to \infty$ とする

無限積（infinite product）とは、部分積（partial products）P_n の極限のことである。$x_n = \alpha/2^n$ とおくと、$n \to \infty$ のとき $x_n \to 0$ であり、

$$2^n\sin\frac{\alpha}{2^n} = \alpha\cdot\frac{\sin x_n}{x_n} \longrightarrow \alpha\cdot 1 = \alpha.$$

考えてみよう $\lim P_n = \frac{\sin\alpha}{\alpha}$ の逆数をとってよいのはなぜか？

極限が 0 でないからである。いま考えている α については $\alpha \neq 0$ かつ $\sin\alpha \neq 0$ である。したがって $P_n \to \frac{\sin\alpha}{\alpha} \neq 0$ であり、無限積は存在し、$\sin\alpha$ をそれで割ると

$$\frac{\sin\alpha}{\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{4}\cos\frac{\alpha}{8}\cdots} = \lim_{n\to\infty}\frac{\sin\alpha}{P_n} = \lim_{n\to\infty}2^n\sin\frac{\alpha}{2^n} = \alpha,$$

となる。これが求める公式である。

$\pi/2$ の公式

$\alpha = \pi/2$ とする。これは π の整数倍ではなく、また $\sin\alpha = 1$ である。すると

$$\frac{\pi}{2} = \frac{1}{\cos\frac{\pi}{4}\cos\frac{\pi}{8}\cos\frac{\pi}{16}\cdots}.$$

あとは、これらの余弦が入れ子になった平方根（nested square roots）であることを示せばよい。$k \geq 1$ に対して $c_k = \cos(\pi/2^{k+1})$ とおく。このとき $c_1 = \cos\frac{\pi}{4} = \sqrt{\frac{1}{2}}$ である。半角の公式（half-angle formula）$\cos^2\theta = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos 2\theta$ を $\theta = \pi/2^{k+2}$ として用いると

$$c_{k+1}^2 = \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2}c_k, \qquad \text{よって} \qquad c_{k+1} = \sqrt{\tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2}c_k},$$

となる。ここで正の平方根をとったのは、$0 < \pi/2^{k+2} < \pi/2$ より $c_{k+1} > 0$ だからである。したがって

$$c_1 = \sqrt{\tfrac{1}{2}}, \quad c_2 = \sqrt{\tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2}\sqrt{\tfrac{1}{2}}}, \quad c_3 = \sqrt{\tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2}\sqrt{\tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2}\sqrt{\tfrac{1}{2}}}}, \quad \ldots,$$

であり、各因数は 1 つ前の因数を $t \mapsto \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}t}$ に代入したものである。これらはまさに求める積の因数であるから、

$$\frac{\pi}{2} = \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{2}}\sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}}}\sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}}}}\cdots}.$$

検算

- $\alpha = \pi/2$、$n = 1$ のとき、有限の公式は $\cos\frac{\pi}{4} = \dfrac{1}{2\sin(\pi/4)} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$ を与え、これは正しい。
- 入れ子の根号の部分積の逆数は 1.4142、1.5307、1.5607、1.5683、1.5702,… であり、60 個の因数をとると 1.5707963267949 となって、計算機の精度（machine precision）の範囲で $\pi/2$ と一致する。
- 有限の恒等式は、ランダムな α と 14 までの n についても数値的に確かめられ、また $\alpha = 2.5$ や $\alpha = -4$ などの値に対して $\sin\alpha / P_{60}$ は α を再現する。

よくある間違い

- $\sin(\alpha/2^n)$ が 0 でない理由を述べずにそれで割ってしまう。これこそが条件 $\alpha \neq k\pi$ の存在理由である。

- $\lim P_n \neq 0$ であることに触れずに $1/\lim P_n = \lim(1/P_n)$ と書いてしまう。
- 半角の公式の段階で正の平方根をとる根拠を示し忘れる。

STEP のその先へ

最後の公式は 1593 年のヴィエト（Viète）の積であり、π を表す厳密な無限の式として史上初めて書き下されたものである。大学では解析学（analysis）で無限積をきちんと学ぶ。そこでは、0 でない因数からなる積は、その部分積が0 **でない**極限に近づくとき収束する（converge）という。これはまさに私たちが確認した点である。オイラー（Euler）の積 $\sin\alpha = \alpha\prod_{k\geq 1}\left(1-\frac{\alpha^2}{k^2\pi^2}\right)$ は、より奥深い親戚である。Abbott の *Understanding Analysis*（解析学入門書）は、こうした極限が厳密に扱われる様子を見るのに親しみやすい一冊である。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。