解答例

STEP I 1990、第 7 問

純粋数学 ・ 一階線形常微分方程式

> **STEP I 1990、問 7**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/90-s1-q7

鍵となる考え方

$y = uv$ とおくと、必要なのは一つの関数であるのに未知関数が二つになるので、そのうちの一方に追加の条件を課す余裕が生まれる。自然な選び方は、u によって P を含む項を消すことであり、そうすると直接積分できる微分方程式（differential equation）が残る。これは姿を変えた積分因子法（integrating-factor method）にほかならない。実際、$1/u$ がちょうど積分因子になっている。

解答

置き換え

$y = uv$ とすると、積の微分法（product rule）により $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = u\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x} + v\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}$ であるから、方程式は

$$u\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x} + v\left(\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} + Pu\right) = Q.$$

となる。u を 1 階（first order）の方程式

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} + Pu = 0,$$

を満たすように選べば、括弧の中が消えて

$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x} = \frac{Q}{u},$$

が残る。これは求められているとおり、$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}$ を x、Q、u のみで表す方程式である。（割り算をするには $u \neq 0$ が必要である。$u' + Pu = 0$ の 0 でない解は $A \neq 0$ として $u = A\mathrm{e}^{-\int P\,\mathrm{d}x}$ であり、これは決して 0 にならない。）

個別の方程式

ここでは $P = -\dfrac{2}{x+1}$、$Q = (x+1)^{5/2}$ である。Q は（実数として）$x \geq -1$ でしか定義されず、P は $x = -1$ で定義されないことに注意する。そこで $x > -1$ の範囲で考える。このとき $x+1 > 0$ である。

考えてみよう u については一般解（general solution）が必要だろうか。それとも解が一つあれば十分だろうか。

0 でない解が一つあれば十分である。最終的な答えに現れる任意定数は、v を求める積分のときに出てくるからである。そこで

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} = \frac{2u}{x+1}$$

を変数分離（separation of variables）によって解く。$\ln|u| = 2\ln(x+1) + 定数$ となるので、

$$u = (x+1)^2.$$

をとる。（確認：$u' = 2(x+1) = \frac{2u}{x+1}$。）すると

$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x} = \frac{(x+1)^{5/2}}{(x+1)^2} = (x+1)^{1/2}, \qquad \text{よって} \qquad v = \tfrac{2}{3}(x+1)^{3/2} + C.$$

したがって一般解は

$$y = uv = \tfrac{2}{3}(x+1)^{7/2} + C(x+1)^2.$$

である。$y(1) = 0$ を用いると

$$0 = \tfrac{2}{3}\cdot 2^{7/2} + 4C \quad \Longrightarrow \quad C = -\tfrac{1}{6}\cdot 2^{7/2} = -\tfrac{1}{6}\cdot 8\sqrt{2} = -\frac{4\sqrt{2}}{3}.$$

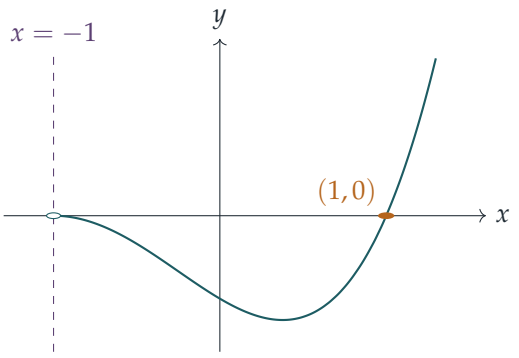
ゆえに

$$\boxed{y = \tfrac{2}{3}(x+1)^{7/2} - \tfrac{4\sqrt{2}}{3}(x+1)^2 = \tfrac{2}{3}(x+1)^2\left[(x+1)^{3/2} - 2\sqrt{2}\right]}$$

解が有効な範囲

考えてみよう y の式は $x = -1$ でも意味をもつ。それなのに、なぜ $x = -1$ は含まれないのだろうか。

解が有効なのは $x > -1$ である。$x < -1$ では右辺の $(x+1)^{5/2}$ が実数にならないので、そこでは微分方程式そのものが意味をもたない（求めた $(x+1)^{7/2}$ も同様である）。$x = -1$ では項 $\frac{2y}{x+1}$ が定義されないので、得られた式が $x \to -1^+$ のとき $y \to 0$ を与えるとしても、方程式はそこでも成り立たない。$x+1 > 0$ となる区間 $x > -1$ 全体では、上のすべての手順が正当であり、解はこの区間に含まれる与えられた点 $x = 1$ を通る。



白丸は除外される端点 $x=-1$ を表す。

検算

- 元の式に代入する：$y'=\frac{7}{3}(x+1)^{5/2}-\frac{8\sqrt{2}}{3}(x+1)$、$\frac{2y}{x+1}=\frac{4}{3}(x+1)^{5/2}-\frac{8\sqrt{2}}{3}(x+1)$ であり、その差は求めるとおり $(x+1)^{5/2}$ となる。
- $y(1)=\frac{2}{3}\cdot 4\left(2\sqrt{2}-2\sqrt{2}\right)=0$。
- 特定の値：$y(0)=\frac{2-4\sqrt{2}}{3}\approx -1.219$、$y(3)=\frac{256-64\sqrt{2}}{3}\approx 55.16$。$y(1)=0$ から出発して方程式を数値的に（ルンゲ＝クッタ法（Runge–Kutta method）で）積分すると、どちらの値とも 9 桁まで一致する。

よくある間違い

- P の符号を間違える：ここでは $P=-\frac{2}{x+1}$ であるから $u=(x+1)^2$ であり、$(x+1)^{-2}$ ではない。
- v を求める積分で定数を忘れる。そうすると $y(1)=0$ に合わせる自由度がなくなってしまう。
- 範囲を $x\geq -1$ と答える：方程式は $x=-1$ で定義されない。

STEP のその先へ

厄介な項を取り除くように u を選ぶというのは、**定数変化法**（variation of parameters）の背後にある考え方である。まず斉次方程式（homogeneous equation）を解き、次にその「定数」を変化させて外力項を吸収させるのである。同じ工夫は 2 階線形方程式にも使える。また、解がどこで有効かという問いは、存在と一意性の定理（existence

and uniqueness theorem）へと発展する。この定理は、P と Q が連続であるような任意の区間上で、解がただ一つ存在することを保証する。Boyce and DiPrima, *Elementary Differential Equations*（微分方程式の入門書）は、その両方を扱っている。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。