解答例

STEP I 1990、第 6 問

純粋数学 ・ ベクトルと平行四辺形

> **STEP I 1990、問 6**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/90-s1-q6

鍵となる考え方

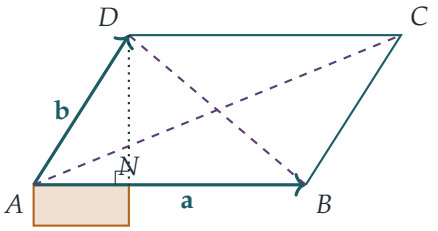
原点を A にとり、すべてを 2 つの辺ベクトル（side vector）$\mathbf{a} = \overrightarrow{AB}$ と $\mathbf{b} = \overrightarrow{AD}$ で表す。すると対角線（diagonal）は $\mathbf{a}+\mathbf{b}$ と $\mathbf{b}-\mathbf{a}$ となり、長さの 2 乗はすべてあるベクトルとそれ自身との内積（dot product）になる。これらの内積を展開すれば、それで仕事はすべて片づく。必要な幾何的事実はただ 1 つ、$|\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}|$ は $\mathbf{u}$ の長さと、$\mathbf{v}$ の $\mathbf{u}$ への射影（projection）の長さとの積である、ということだけである。

解答

A を原点とし、$\overrightarrow{AB} = \mathbf{a}$、$\overrightarrow{AD} = \mathbf{b}$ とおく。$ABCD$ は平行四辺形（parallelogram）であるから $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AD} = \mathbf{b}$ であり、したがって

$$\overrightarrow{AC} = \mathbf{a}+\mathbf{b}, \qquad \overrightarrow{BD} = \mathbf{b}-\mathbf{a}.$$

任意のベクトルについて $|\mathbf{v}|^2 = \mathbf{v}\cdot\mathbf{v}$ が成り立ち、内積は対称で、和に対して分配法則が成り立つ。$a = |\mathbf{a}|$、$b = |\mathbf{b}|$ と書く。



図において、N は D から直線 AB に下ろした垂線の足であり、したがって AN は AD

の AB への射影で、その長さは $|\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}|/a$ である。

小問 (i)

対辺は等しいので、左辺は $2a^2+2b^2$ である。対角線については

$$AC^2=(\mathbf{a}+\mathbf{b})\cdot(\mathbf{a}+\mathbf{b})=a^2+2\,\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}+b^2,$$
$$BD^2=(\mathbf{b}-\mathbf{a})\cdot(\mathbf{b}-\mathbf{a})=a^2-2\,\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}+b^2.$$

これらを加えると交差項が打ち消し合い、$AC^2+BD^2=2a^2+2b^2=AB^2+BC^2+CD^2+DA^2$ となって、示すべき式が得られる。（これはしばしば平行四辺形の法則（parallelogram law）と呼ばれる。）

小問 (ii)

今度は同じ 2 つの式を引き算すると

$$AC^2-BD^2=4\,\mathbf{a}\cdot\mathbf{b},\qquad\text{よって}\qquad\left|AC^2-BD^2\right|=4\,|\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}|.$$

次に $|\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}|$ の意味を考える。θ を $\mathbf{a}$ と $\mathbf{b}$ のなす角とすると $|\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}|=a\cdot b|\cos\theta|$ であり、$b|\cos\theta|$ はちょうど AD の AB への射影の長さ AN である。よって $|\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}|$ は、AB と、AD の AB への射影とを 2 辺とする長方形（図の網かけ部分）の面積である。

考えてみよう この結果は、どの辺についても、また隣り合う辺のどちらについても成り立つと主張している。なぜ 8 通りの計算を別々に行う必要がないのだろうか。

平行四辺形のどの辺もベクトル $\pm\mathbf{a}$ または $\pm\mathbf{b}$ であり、それに隣り合う 2 辺は、符号を除いてもう一方のベクトルである。たとえば辺 BC は $\mathbf{b}$ であり、その隣の辺 AB と CD は $\mathbf{a}$ と $-\mathbf{a}$ である。射影の長さは $|\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}|/|\mathbf{u}|$ であるから、符号を変えてもベクトルの長さも射影の長さも変わらない。したがって、辺と隣り合う辺をどう選んでも、長方形の面積は同じ $|\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}|$ になる。すなわち $a\times$（$\mathbf{b}$ の射影の長さ、射影先は$\mathbf{a}$）または $b\times$（$\mathbf{a}$ の射影の長さ、射影先は$\mathbf{b}$）のいずれかであり、どちらも $|\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}|$ に等しい。ゆえに、どの場合にも

$$\left|AC^2-BD^2\right|=4\times(\text{その長方形の面積}).\qquad\blacksquare$$

最後の小問

小問 (ii) は 2 つの辺の内積から得られた。辺と対角線の役割を入れ替えて、2 本の対角線の内積をとると

$$\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BD}=(\mathbf{a}+\mathbf{b})\cdot(\mathbf{b}-\mathbf{a})=b^2-a^2,$$

となる。交差項 $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}$ と $-\mathbf{b}\cdot\mathbf{a}$ が打ち消し合うからである。したがって

$$\left|AB^2-AD^2\right| = |\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BD}|.$$

小問 (ii) と同様に論じると、次が得られる。

結果. $\left|AB^2-AD^2\right|$ は、一方の対角線と、もう一方の対角線のそれへの射影とを 2 辺とする長方形の面積に等しい。

証明. φ を 2 本の対角線のなす角とすると、$|\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BD}| = AC\cdot BD\,|\cos\varphi|$ である。ここで $BD\,|\cos\varphi|$ は BD の AC への射影の長さであり、$AC\,|\cos\varphi|$ は AC の BD への射影の長さである。よって、どちらの対角線から始めても面積は同じであり、上の式によりそれは $\left|AB^2-AD^2\right|$ に等しい。■

さらに (ii) に似た形にするため、対角線が互いを二等分する点を O とする。すると $AC=2OA$ であり、BD の AC への射影は OB の OA への射影の 2 倍である。よって $\left|AB^2-AD^2\right|$ は、OA と、OB の OA への射影とを 2 辺とする長方形の面積の 4 倍でもある。今度は対角線の半分が辺の役割を果たしているのである。

ここから 2 つの気持ちのよい系が得られる。対角線が等しくなるのはちょうど $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}=0$ のとき、すなわち平行四辺形が長方形のときである。対角線が直交するのはちょうど $a=b$ のとき、すなわち菱形（rhombus）のときである。

検算

$A=(0,0)$、$B=(4,0)$、$D=(1,2)$ とすると $C=(5,2)$ である。このとき $AC^2=29$、$BD^2=13$ であり、$2(16+5)=42=29+13$ となって (i) が確かめられる。(ii) については $AC^2-BD^2=16$ であり、一方 AD の AB への射影の長さは 1 なので長方形の面積は $4\times1=4$ となり、$16=4\times4$ である。最後の小問については $AB^2-AD^2=16-5=11$ であり、$\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BD}=(5,2)\cdot(-3,2)=-11$ である。また、3 つの結果すべてを、辺と隣り合う辺のあらゆる選び方について、10^5 個のランダムな平行四辺形で検証した。最大の食い違いは約 10^{-13} であり、これは単なる丸め誤差である。

よくある間違い

- $\overrightarrow{BD}=\mathbf{a}-\mathbf{b}$ や $\mathbf{a}+\mathbf{b}$ と書いてしまう。BD^2 については符号は問題にならないが、向きを正しくとっておけば後で混乱せずに済む。
- 絶対値を忘れる。A における角が鈍角のとき $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}$ は負になるが、面積は負になりえない。だからこそ問題文では $\left|AC^2-BD^2\right|$ となっているのである。

- 最後の小問で、対角線全体を用いているのに係数 4 をつけてしまう。対角線全体を用いるなら係数は 1 であり、係数 4 が現れるのは対角線の半分を用いる場合だけである。

STEP のその先へ

恒等式 $|\mathbf{a}+\mathbf{b}|^2 - |\mathbf{a}-\mathbf{b}|^2 = 4\,\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}$ は**偏極恒等式**（polarisation identity）であり、内積が長さだけから復元できることを示している。小問 (i) の平行四辺形の法則とあわせて、これは内積空間（inner product space）に関する重要な事実である。ノルム（norm）が内積から得られるのは、それが平行四辺形の法則を満たすときであり、かつそのときに限る。これはヨルダン（Jordan）とフォン・ノイマン（von Neumann）による定理である。ストラング（Strang）の *Introduction to Linear Algebra*（線形代数入門）は、内積、射影、直交性（orthogonality）が任意の次元で展開されるのを見るのに適した本である。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。