解答例

STEP I 1990、第 5 問

純粋数学 ・ 部分分数分解と曲線の概形

> **STEP I 1990、問 5**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/90-s1-q5

鍵となる考え方

(i) では 2 次式が因数分解できるので、部分分数分解（partial fractions）によって積分は対数の差になる。(ii) では巨大な指数に圧倒されそうになるが、$1760 = 8 \times 220$ なので、この関数は実は $u = x^{220} \geq 0$ とおいたときの $u^8 - u + q$ にすぎない。グラフの形は停留点（stationary points）から決まり、解の個数は、横軸が極大値（local maximum）と 2 つの極小値（minima）に対してどの位置にあるかだけで決まる。

解答

小問 (i)

$6 \times 15 = 90 = 9 \times 10$ かつ $9 + 10 = 19$ であるから、この 2 次式は次のように因数分解できる。

$$6x^2 + 19x + 15 = (2x + 3)(3x + 5).$$

ここで

$$\frac{1}{(2x+3)(3x+5)} = \frac{A}{2x+3} + \frac{B}{3x+5}, \qquad \text{より} \qquad 1 = A(3x+5) + B(2x+3).$$

とおく。$x = -\frac{3}{2}$ を代入すると $\frac{1}{2}A = 1$ となるので $A = 2$、$x = -\frac{5}{3}$ を代入すると $-\frac{1}{3}B = 1$ となるので $B = -3$ である。$2x+3$ と $3x+5$ はともに $[1,3]$ 上で正であるから、絶対値記号は必要ない。

$$\int_1^3 \frac{\mathrm{d}x}{6x^2+19x+15} = \int_1^3 \left(\frac{2}{2x+3} - \frac{3}{3x+5}\right) \mathrm{d}x = \Big[\ln(2x+3) - \ln(3x+5)\Big]_1^3$$
$$= \ln\frac{9}{14} - \ln\frac{5}{8} = \ln\frac{72}{70} = \ln\frac{36}{35}.$$

小問 (ii)

対称性と端での振る舞い。 2 つの指数はともに偶数なので、f は偶関数（even function）であり、そのグラフは y 軸に関して対称である。$|x|$ が大きいときは x^{1760} の項が支配的なので、$x \to \pm\infty$ のとき $\mathrm{f}(x) \to +\infty$ となる。また、$\mathrm{f}(0) = q$ かつ $\mathrm{f}(\pm 1) = q$ である。

停留点。 微分すると

$$\mathrm{f}'(x) = 1760x^{1759} - 220x^{219} = 220\,x^{219}(8x^{1540} - 1).$$

これは $x = 0$ および $x^{1540} = \frac{1}{8}$ となる点、すなわち

$$a = 8^{-1/1540} \approx 0.9987.$$

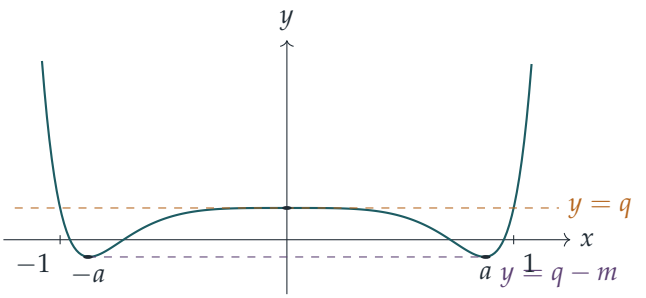
として $x = \pm a$ で 0 になる。$x > 0$ では $\mathrm{f}'(x)$ の符号は $8x^{1540} - 1$ の符号と一致し、$(0, a)$ 上で負、$x > a$ で正である。x^{219} は奇数乗なので、$x < 0$ では符号が逆になる。したがって、f は $(-\infty, -a)$ で減少し、$(-a, 0)$ で増加し、$(0, a)$ で減少し、(a, ∞) で増加する。すなわち、$x = 0$ で極大値 q をとり、$x = \pm a$ で等しい 2 つの極小値をとる。

> **考えてみよう** $8^{-1/1540}$ と格闘せずに極小値を求めるにはどうすればよいだろうか。

$u = x^{220}$ を用いて考える。$x = \pm a$ では $x^{1540} = u^7 = \frac{1}{8}$ であるから、$u = 8^{-1/7}$ かつ $u^8 = u \cdot u^7 = \frac{1}{8}u$ となる。よって

$$\mathrm{f}(\pm a) = u^8 - u + q = q - \tfrac{7}{8}u = q - m, \qquad \text{ただし} \qquad m = \tfrac{7}{8} \cdot 8^{-1/7} = 7 \cdot 2^{-24/7} \approx 0.650.$$

グラフの概形。 グラフは「W」字型である。高いところから始まり、$x = -a$ で極小値 $q - m$ まで下がり、原点で極大値 q まで上がり、$x = a$ で再び極小値 $q - m$ まで下がった後、急激に上昇する。指数が非常に大きいため、実際のグラフは極めて平らである。$|x|$ が 1 にごく近くない限り x^{220} は非常に小さいので、$(-1, 1)$ の大部分で $\mathrm{f}(x) \approx q$ となり、$x = \pm 1$（ここでグラフは高さ q に戻る）のすぐ内側に 2 つの細いくぼみがあり、その外側はほぼ垂直な壁になっている。下の図では、特徴が見えるようにくぼみを誇張して描いている。



解の個数を数える。 $\mathrm{f}(x)=0$ の解はグラフが x 軸と交わる点であるから、0 を極大値 q および極小値 $q-m$ と比較する。

- $q>m$：極小値 $q-m$ が正なので、いたるところで $\mathrm{f}>0$ である。**解はない。**
- $q=m$：グラフは極小点でのみ軸に接する。**解は 2 個**、$x=\pm a$ である。
- $0<q<m$：このとき $q-m<0<q$ である。4 つの単調（monotonic）な区間 $(-\infty,-a)$、$(-a,0)$、$(0,a)$、(a,∞) のそれぞれにおいて、f は連続かつ狭義単調であり、正の値から負の値へ、あるいはその逆へと移るので、各区間にちょうど 1 つの解をもつ。**解は 4 個。**
- $q=0$：$\mathrm{f}(x)=x^{220}(x^{1540}-1)$ となり、これはちょうど $x=0$ と $x=\pm1$ で 0 になる。**解は 3 個。**
- $q<0$：極大値 $\mathrm{f}(0)=q$ が負なので、$[-a,a]$ 全体で $\mathrm{f}<0$ であり、(a,∞) と $(-\infty,-a)$ のそれぞれにおいて f は負の値から $+\infty$ まで狭義単調に変化する。**解は 2 個。**

したがって、相異なる解の個数としてありうるのは 0、2、3、4 であり、次のようになる。

0 個の解： $q>m$,
2 個の解： $q<0$ または $q=m$,
3 個の解： $q=0$,
4 個の解： $0<q<m$,

$$m=\tfrac{7}{8}\cdot 8^{-1/7}=7\cdot 2^{-24/7}\approx 0.650.$$

検算

(i) の被積分関数にシンプソンの公式（Simpson's rule）を適用すると 0.0281709 となり、$\ln\frac{36}{35}=0.0281709$ と一致する。(ii) については、$x=1$ の近くで $x^{1760}-x^{220}$ の最小値を細かく数値探索すると、$x\approx 0.99865$ で -0.650123 となり、$-m$ および a と一致する。細かい格子上で f の符号の変化を数えると、$q=1,\ 0.5,\ 0.1,\ 0.001,\ 0,\ -0.01,\ -5$ に対して解の個数は $0,4,4,4,3,2,2$ となり、表の予測どおりである。$q=0$ の場合はグラフの概形の妥当性を確かめるよい材料である。グラフは原点と $(\pm1,0)$ を通らなければならない。

よくある間違い

- 境界の場合 $q=0$（極大値が軸上にあるので解は 3 個）と $q=m$（極小点での 2 つの重解）を見落とす。
- $-a$ と a の間で何も起こらないことを確かめずに、$q<0$ のとき「対称性により」解

は 2 個だと主張する。そこに余分な解がないことを保証するのは、極大値 q が負であるという事実である。

- なだらかに曲がった「W」を描く。指数がこれほど大きいと、グラフは $|x| < 1$ でほぼ高さ q の水平線になる。概形の図でくぼみを誇張するとしても、そのことは述べておく価値がある。

STEP のその先へ

停留値の位置を調べて解の個数を数えることは、解析学（analysis）の最初の講義で厳密に扱われる中間値の定理（intermediate value theorem）と単調性による議論の入口である。また、置換 $u = x^{220}$ は、$n \to \infty$ のとき x^n がどう振る舞うか、すなわち $(-1, 1)$ 上で 0 に収束するが一様収束（uniform convergence）はしないことも示している。Abbott の *Understanding Analysis*（解析学入門書）は、連続性と一様収束の両方を丁寧かつ読みやすく扱っている。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。