解答例

STEP I 1990、第 4 問

純粋数学 ・ 等差数列と階差

> **STEP I 1990、問 4**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/90-s1-q4

鍵となる考え方

数列のどの項も、初項に差（difference）の累積和を加えたものである。等差数列（arithmetic progression）では差が一定なので、和は容易に求まる。二重等差数列（double arithmetic progression）では差そのものが等差数列をなすので、和をとる操作がもう一段増え、二項係数（binomial coefficient）$\binom{n}{2}$ と $\binom{n}{3}$ が自然に現れる。最後の部分は、未知の 2 つの差についての 2 本の一次方程式に帰着する。

解答

等差数列

公差（common difference）を $d = a_2 - a_1$ とおくと、$a_k = a_1 + (k-1)d$ である。このとき

$$\sum_{k=1}^{n} a_k = na_1 + d\sum_{k=1}^{n}(k-1) = na_1 + \frac{n(n-1)}{2}(a_2 - a_1),$$

となる。ここで $0+1+\cdots+(n-1) = \frac{1}{2}n(n-1)$ を用いた。a_1 と a_2 の項をまとめると

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_n = \frac{n}{2}[(3-n)a_1 + (n-1)a_2].$$

二重等差数列

階差を $\delta_k = b_{k+1} - b_k$ とおく。これらは初項 $p = \delta_1 = b_2 - b_1$、公差

$$e = \delta_2 - \delta_1 = (b_3 - b_2) - (b_2 - b_1) = b_3 - 2b_2 + b_1.$$

の等差数列をなす。よって $\delta_j = p + (j-1)e$ であり、最初の $k-1$ 個の階差を足し合わせると（前半の公式で n を $k-1$ に置き換えたもの）

$$b_k = b_1 + \sum_{j=1}^{k-1} \delta_j = b_1 + (k-1)p + \frac{(k-1)(k-2)}{2}\, e = b_1 + \binom{k-1}{1} p + \binom{k-1}{2} e.$$

を得る。次に $k = 1, \ldots, n$ について和をとる。必要な和は 2 つある。1 つ目は前と同様に $\sum_{k=1}^{n}(k-1) = \binom{n}{2}$ である。2 つ目は、$j = k-1$ が 0 から $n-1$ まで動くとして

$$\sum_{j=0}^{n-1} \frac{j(j-1)}{2} = \frac{1}{2}\left[\frac{(n-1)n(2n-1)}{6} - \frac{(n-1)n}{2}\right] = \frac{n(n-1)}{12}[(2n-1)-3]$$
$$= \frac{n(n-1)(n-2)}{6} = \binom{n}{3}.$$

したがって

$$\sum_{k=1}^{n} b_k = nb_1 + \binom{n}{2}(b_2 - b_1) + \binom{n}{3}(b_3 - 2b_2 + b_1).$$

これはすでに n、b_1、b_2、b_3 による式になっている。各 b_i の係数を個別に知りたければ、展開して

$$b_1 + \cdots + b_n = \frac{n(n^2 - 6n + 11)}{6}\, b_1 + \frac{n(n-1)(7-2n)}{6}\, b_2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{6}\, b_3.$$

を得る。（簡単な確認：$n = 1, 2, 3$ のとき、それぞれ b_1、$b_1 + b_2$、$b_1 + b_2 + b_3$ となる。）

考えてみよう $\binom{n}{3}$ がどこから来るのかを、もっとすっきりと見る方法はあるだろうか？

ある。$\binom{k-1}{2}$ は $k-1$ 個から 2 個を選ぶ方法の数であり、ホッケースティック恒等式（hockey-stick identity）$\sum_{k=1}^{n}\binom{k-1}{2} = \binom{n}{3}$（$n$ 個から 3 個を選ぶとき、まず最大のもの k を固定して数える）を使えば、和が一度に求まる。「階差の階差」を一段とるごとに二項係数の段が 1 つ上がる。これは積分によって冪の次数が 1 つ上がるのとまったく同じである。

階乗数列

ここでは $b_1 = 1$ であり、上と同じ p と e を用いると $b_k = 1 + (k-1)p + \frac{1}{2}(k-1)(k-2)e$ である。よって

$$b_2 = 1 + p, \qquad b_4 = 1 + 3p + 3e, \qquad b_6 = 1 + 5p + 10e.$$

$c_1 = b_2$、$c_2 = b_4$、$c_3 = b_6$、$c_4 = 220$ の階乗数列（factorial progression）では、隣り合う項の差は $1!\,d$、$2!\,d$、$3!\,d$、すなわち d、$2d$、$6d$ である：

$$\begin{aligned} b_4 - b_2 &= 2p + 3e = d, \\ b_6 - b_4 &= 2p + 7e = 2d, \\ 220 - b_6 &= 219 - 5p - 10e = 6d. \end{aligned}$$

1 つ目を 2 つ目に代入すると $2p + 7e = 4p + 6e$ となるので $e = 2p$、さらに $d = 8p$ である。3 つ目の式は

$$219 - 5p - 20p = 48p \quad \Longrightarrow \quad 73p = 219 \quad \Longrightarrow \quad p = 3,$$

となるので、$e = 6$、$d = 24$ であり、要求どおり d は 0 でない。どの段階でも値が一意に定まったので、解はただ 1 つである。

よって $b_k = 1 + 3(k-1) + 3(k-1)(k-2) = 3k^2 - 6k + 4$ であり、数列は $1, 4, 13, 28, 49, 76, \ldots$ となる。実際、$b_2, b_4, b_6, 220 = 4, 28, 76, 220$ の差は $24, 48, 144 = 1! \cdot 24,\ 2! \cdot 24,\ 3! \cdot 24$ である。

最後に、$b_1 = 1$、$b_2 - b_1 = 3$、$b_3 - 2b_2 + b_1 = 6$ として和の公式を用いると

$$\begin{aligned} 1 + b_2 + \cdots + b_n &= n + 3 \cdot \frac{n(n-1)}{2} + 6 \cdot \frac{n(n-1)(n-2)}{6} \\ &= \frac{n}{2}[2 + 3(n-1) + 2(n-1)(n-2)] \\ &= \frac{n(2n^2 - 3n + 3)}{2}. \end{aligned}$$

検算

$n = 1, 2, 3$ のとき、最終的な公式は 1、5、18 を与え、1、$1+4$、$1+4+13$ と一致する。$n = 6$ のときは $3 \cdot 57 = 171$ であり、直接計算しても $1 + 4 + 13 + 28 + 49 + 76 = 171$ である。また、コンピュータを用いて、数百個の無作為な数列とすべての $n \le 24$ について、2 つの一般的な和の公式を（分数で）厳密に確認した。

よくある間違い

- 階乗数列の差を $d, 2d, 3d$ としてしまう：差は $1!\,d$、$2!\,d$、$3!\,d$ なので、3 つ目は $6d$ である。
- $b_k = b_1 + kp + \ldots$ と書いてしまう：b_1 と b_k の間にある階差は $k-1$ 個しかない。

STEP のその先へ

これは差分法（calculus of finite differences）である。m 階差が一定である数列は n の m 次多項式（polynomial）であり、その部分和（partial sum）は $m+1$ 次多項式となる。これは基底（basis）$\binom{n}{0}, \binom{n}{1}, \binom{n}{2}, \ldots$ を用いて書くのが最もよい（ニュートン（Newton）の前進差分公式（forward-difference formula））。$\binom{n}{r}$ を足し合わせて $\binom{n+1}{r+1}$ を得ることは、$\int x^r \, \mathrm{d}x = \frac{x^{r+1}}{r+1}$ の離散版である。この方向の問題をさらに解きたければ、Siklos の *Advanced Problems in Mathematics* の問題に挑戦するとよい。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。