解答例

STEP I 1990、第 3 問

純粋数学 ・ 法線と平行曲線

> **STEP I 1990、問 3**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/90-s1-q3

鍵となる考え方

下向きの単位法線ベクトル（unit normal）を具体的に書き下し、$\mathbf{s}$ の座標を x で表せば、あとはすべて自然に従う。小問 (i) は、$\mathbf{s}$ の y 座標が 0 になるように強制するだけの問題である。小問 (ii) では、指示された置き換えによって $\mathbf{s}$ の座標が非常に簡単になり、傾きの条件は 1 階微分方程式（first-order differential equation）に帰着する。しかもこれは、ある関数の導関数そのもの、すなわち完全導関数（exact derivative）の形になっていることがわかる。

解答

準備。 $y = \mathrm{f}(x)$ の接線（tangent）の方向は $(1, \mathrm{f}'(x))$ であるから、法線方向は $\pm(\mathrm{f}'(x), -1)$ である。下向きのものは y 成分が負であるから、

$$\mathbf{n} = \frac{1}{N}\begin{pmatrix} \mathrm{f}'(x) \\ -1 \end{pmatrix}, \qquad N = \sqrt{1 + \mathrm{f}'(x)^2},$$

となり、したがって

$$\mathbf{s} = \mathbf{r} + \mathrm{p}(x)\mathbf{n} = \begin{pmatrix} x + \dfrac{\mathrm{p}(x)\,\mathrm{f}'(x)}{N} \\ \mathrm{f}(x) - \dfrac{\mathrm{p}(x)}{N} \end{pmatrix}.$$

また、$\mathbf{n}$ は単位ベクトルであるから $|\mathbf{r} - \mathbf{s}| = |\mathrm{p}(x)|$ であることにも注意しておく。

小問 (i)

ここでは $\mathrm{f}(x) = x^k$、$\mathrm{f}'(x) = kx^{k-1}$、$N = \sqrt{1 + k^2x^{2k-2}}$ である。$\mathbf{s}$ が x 軸上にあるためには、その y 座標が 0 でなければならない：

$$x^k - \frac{\mathrm{p}(x)}{N} = 0 \quad \Longrightarrow \quad \mathrm{p}(x) = x^k\sqrt{1 + k^2x^{2k-2}}.$$

このように選ぶと、$\mathbf{s}$ の x 座標は

$$x + x^k \cdot kx^{k-1} = x + kx^{2k-1},$$

となる。これは連続な増加関数で、$x \to 0^+$ のとき 0 に近づき、$x \to \infty$ のとき無限大に発散する。よって $\mathbf{s}$ は確かに正の x 軸の一部だけでなく、その全体をくまなく動く。

さて、$|\mathbf{r}|^2 = x^2 + x^{2k}$ であり、$|\mathbf{r} - \mathbf{s}|^2 = \mathrm{p}(x)^2 = x^{2k} + k^2x^{4k-2}$ である（ここで $\mathrm{p} > 0$）。したがって、すべての $x > 0$ に対して $|\mathbf{r}| = |\mathbf{r} - \mathbf{s}|$ となるのは、ちょうど

$$x^2 = k^2x^{4k-2} \quad \text{任意の} x > 0.$$

が成り立つときである。$x = 1$ とおくと $k^2 = 1$ でなければならず、$k = 1$ となる。逆に $k = 1$ のとき両辺はともに x^2 に等しい。ゆえに $k = 1$ である。

幾何学的には次のようになる。直線 $y = x$ 上では、(x, x) から下ろした下向きの法線は x 軸と $(2x, 0)$ で交わり、O、(x, x)、$(2x, 0)$ を頂点とする三角形は、等しい 2 辺の長さがともに $\sqrt{2}\,x$ の二等辺三角形（isosceles triangle）である。

小問 (ii)

今度は $\mathrm{f}(x) = x^2$、$\mathrm{f}'(x) = 2x$、$N = \sqrt{1 + 4x^2}$ である。$\mathrm{p} = \mathrm{q}N$ とおくと、扱いにくい平方根が消える：

$$\mathbf{s} = \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x + 2x\,\mathrm{q}(x) \\ x^2 - \mathrm{q}(x) \end{pmatrix}.$$

新しい曲線は x を媒介変数とするパラメータ表示（parametric representation）で与えられているから、$\mathbf{s}$ における傾きは

$$\frac{\mathrm{d}Y}{\mathrm{d}X} = \frac{\mathrm{d}Y/\mathrm{d}x}{\mathrm{d}X/\mathrm{d}x} = \frac{2x - \mathrm{q}'}{1 + 2\mathrm{q} + 2x\mathrm{q}'}.$$

である。これを $\mathbf{r}$ における $y = x^2$ の傾き $2x$ に等しいとおき、分母を払うと

$$\begin{aligned} & 2x - \mathrm{q}' = 2x + 4x\mathrm{q} + 4x^2\mathrm{q}' \\ \Longleftrightarrow \quad & (1 + 4x^2)\,\mathrm{q}' + 4x\,\mathrm{q} = 0. \end{aligned}$$

考えてみよう （どこかで 0 になるかもしれない）q で割らずに、これを解くことはできるだろうか？

できる。代わりに、決して 0 にならない $N=\sqrt{1+4x^2}$ で割ればよい。$N'=4x/N$ であるから、

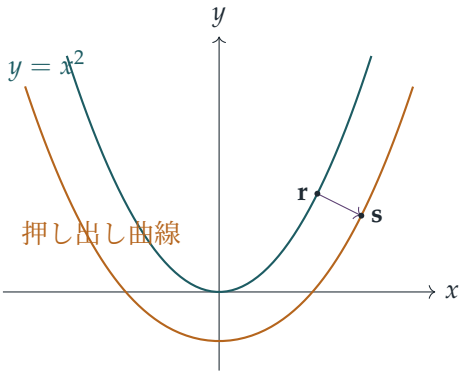
$$\frac{(1+4x^2)\,\mathrm{q}'+4x\,\mathrm{q}}{N}=N\mathrm{q}'+\frac{4x}{N}\,\mathrm{q}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(N\mathrm{q})=\mathrm{p}'(x).$$

よって条件は単に、すべての x について $\mathrm{p}'(x)=0$ ということであり、したがって

$$\mathrm{p}(x)=c,\qquad \text{定数}$$

となる（同値な言い方をすれば $\mathrm{q}(x)=c/\sqrt{1+4x^2}$）。逆に、上の各段階は新しい曲線の傾きが定義される範囲では可逆であるから、任意の定数 c がこの条件を満たす。

新しい曲線は**平行曲線**（parallel curve）である。すなわち、放物線上の各点をその法線に沿って一定の距離 c だけ押し出したものである。図は $c=\frac{1}{2}$ の場合を示している。



微妙な点が一つある。$\mathrm{d}X/\mathrm{d}x=1+2\mathrm{q}+2x\mathrm{q}'$ であり、$\mathrm{q}=c/N$ のときこれは $1+2c/N^3$ と簡単になる。$c>-\frac{1}{2}$ ならばこれは常に正であるから、押し出し曲線（push-off）はなめらかな曲線である。$c\le-\frac{1}{2}$ のとき（頂点における曲率半径（radius of curvature）である $\frac{1}{2}$ 以上だけ**上向きに**押し出すとき）、これは $N^3=-2c$ となるところで 0 になり、押し出し曲線はそこで尖点（cusp）をもつ。

検算

- (i) で $k=2$、$x=1$ とすると、$\mathrm{p}(1)=\sqrt{5}$ であり、$\mathbf{s}=(1,1)+\sqrt{5}\cdot\frac{1}{\sqrt{5}}(2,-1)=(3,0)$ となって、要求どおり x 軸上にある。しかし $|\mathbf{r}|=\sqrt{2}\neq\sqrt{5}$ であるから、$k=2$ は条件を満たさない。
- (ii) で $x=0$ のとき、定数 c による押し出し曲線は $(0,-c)$ を通り、対称性からそこでの傾きは 0 である。これは放物線の頂点での傾きと一致する。

- 数値的に確かめると、$c = 1$、$x = 0.8$ のとき、押し出し曲線の差分による傾き（finite-difference gradient）は $2x = 1.6$ と一致する。一方、定数でない $\mathrm{p} = x^2$ を選ぶと、傾きはおよそ 0.41 となってしまう。

よくある間違い

- 上向きの法線 $(-\mathrm{f}', 1)/N$ を使ってしまう：$\mathbf{s}$ の符号がすべて反転する。
- 新しい曲線の傾きを $(\mathrm{d}Y/\mathrm{d}x)/(\mathrm{d}X/\mathrm{d}x)$ ではなく $\mathrm{d}Y/\mathrm{d}x$ と書いてしまう。新しい曲線の x 座標は X であって、x ではない。
- (i) で、指数の比較（$4k - 2 = 2$）だけから $k = 1$ と結論し、係数の条件 $k^2 = 1$ を確かめ忘れる。

STEP のその先へ

一定の距離だけ押し出した曲線は**平行曲線**あるいは**オフセット曲線**（offset curve）と呼ばれ、実用上も重要である。たとえばフライス盤の刃物の中心は、切削する形状の平行曲線をたどる。オフセットの距離が曲率半径を超えたときに現れる尖点は、曲率中心の軌跡である**縮閉線**（evolute）の上にある。縮閉線は曲線の微分幾何学（differential geometry）における中心的な対象である。よい入門書として Pressley, *Elementary Differential Geometry*（初等微分幾何学）がある。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。