解答例

STEP I 1990、第 2 問

純粋数学 ・ 1 の冪根によるフィルター

> **STEP I 1990、問 2**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/90-s1-q2

この問題は、*Beyond STEP* の第 5.2 節「*1* の累乗根によるフィルター」で詳しく解説されている：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/ch05/roots-filter.html

鍵となる考え方

1 の 3 乗根（cube roots of unity）はフィルターとしてはたらく。$(1+\omega^r)^n$ を二項定理（binomial theorem）で展開し、$r=1,2,3$ についての結果を足し合わせると、各二項係数（binomial coefficient）$\binom{n}{j}$ には $1+\omega^j+\omega^{2j}$ が掛かる。これは 3 が j を割り切るときは 3、そうでないときは 0 となる。したがって、この和にはちょうど求めたい係数だけが残る。各 $(1+\omega^r)^n$ を求めるもう一つの方法は、$1+\omega^r$ を極形式（modulus–argument form）で表し、ド・モアブルの定理（de Moivre's theorem）を用いることである。

解答

1 の 3 乗根

$\omega = \mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}/3}$ であるから、$\omega^3 = \mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}} = 1$ であるが $\omega \neq 1$ である。したがって

$$0 = \omega^3 - 1 = (\omega-1)(1+\omega+\omega^2),$$

であり、$\omega - 1 \neq 0$ であるからこれで割ることができ、$1+\omega+\omega^2 = 0$ を得る。

これより $1+\omega^2 = -\omega$ である。$-1 = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\pi}$ を掛けることは $-\pi$ だけ回転することであるから、

$$1+\omega^2 = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\pi}\,\mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}/3} = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\pi/3}.$$

よって $1+\omega^2$ の絶対値（modulus）は 1、偏角（argument）は $-\frac{\pi}{3}$ である。（確認と

して、$1+\omega^2 = 1+\left(-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}\right) = \frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}$ である。）同様に $1+\omega = -\omega^2 = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/3}$ であり、これは複素共役（complex conjugate）である。

恒等式

第 1 の方法：二項定理。 $r = 1, 2, 3$ に対して、

$$(1+\omega^r)^n = \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} \omega^{rj}.$$

3 つの場合を足し合わせると、

$$(1+\omega)^n + (1+\omega^2)^n + (1+\omega^3)^n = \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} \left(\omega^j + \omega^{2j} + \omega^{3j}\right).$$

考えてみよう 一般の整数 j に対して、$\omega^j + \omega^{2j} + \omega^{3j}$ はどうなるか？

$\omega^{3j} = 1$ であるから、括弧の中は $1+\omega^j+\omega^{2j}$ であり、$\omega^3 = 1$ であるので、これは 3 を法とした j の値（modulo）だけで決まる。

- j が 3 の倍数ならば、$\omega^j = 1$ であり、括弧の中は $1+1+1 = 3$ となる。
- $j \equiv 1 \pmod 3$ ならば、$\omega^j = \omega$、$\omega^{2j} = \omega^2$ であるから、括弧の中は $1+\omega+\omega^2 = 0$ となる。
- $j \equiv 2 \pmod 3$ ならば、$\omega^j = \omega^2$、$\omega^{2j} = \omega^4 = \omega$ であるから、やはり括弧の中は 0 となる。

よって $3 \mid j$ である項だけが残り、

$$(1+\omega)^n + (1+\omega^2)^n + (1+\omega^3)^n = 3\left[\binom{n}{0} + \binom{n}{3} + \cdots + \binom{n}{k}\right],$$

となる。ここで k は n 以下の最大の 3 の倍数である。

第 2 の方法：絶対値と偏角。 前半の結果から $1+\omega = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/3}$、$1+\omega^2 = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\pi/3}$ であり、また $1+\omega^3 = 2$ である。ド・モアブルの定理により、

$$\begin{aligned}(1+\omega)^n + (1+\omega^2)^n + (1+\omega^3)^n &= \mathrm{e}^{\mathrm{i}n\pi/3} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}n\pi/3} + 2^n \\ &= 2^n + 2\cos\left(\frac{n\pi}{3}\right).\end{aligned}$$

2 通りの計算結果を比較して 3 で割ると、

$$\binom{n}{0} + \binom{n}{3} + \binom{n}{6} + \cdots + \binom{n}{k} = \frac{1}{3}\left(2^n + 2\cos\left(\frac{n\pi}{3}\right)\right),$$

となり、これが求める結果である。

$n = 25$ の場合

25 を超えない最大の 3 の倍数は 24 であるから、1 つ目の和はちょうど $n = 25$ のときの恒等式である。ここで $\frac{25\pi}{3} = 8\pi + \frac{\pi}{3}$ であるから $\cos\frac{25\pi}{3} = \cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$ となり、

$$\binom{25}{0} + \binom{25}{3} + \cdots + \binom{25}{24} = \frac{1}{3}\left(2^{25} + 1\right) = \frac{33554433}{3} = 11184811.$$

2 つ目の和

ここでは $n = 24$ であり、$j \equiv 2 \pmod 3$ を満たす係数 $\binom{24}{j}$ の和を求めたい。すべての係数 $\binom{24}{j}$ を、j を 3 で割った余りによって分類すると、

$$S_0 + S_1 + S_2 = \sum_{j=0}^{24} \binom{24}{j} = 2^{24},$$

となる。ここで S_m は $j \equiv m \pmod 3$ を満たす $\binom{24}{j}$ の和である。

対称性 $\binom{24}{j} = \binom{24}{24-j}$ によって、これらは対応づけられる。24 は 3 の倍数であるから、$j \equiv 2$ ならば $24 - j \equiv -2 \equiv 1 \pmod 3$ である。したがって $j \mapsto 24 - j$ により S_2 の項と S_1 の項が一対一に対応し、$S_1 = S_2$ となる。

$n = 24$ のときの恒等式から S_0 が得られる。$\cos 8\pi = 1$ であるから、

$$S_0 = \frac{1}{3}\left(2^{24} + 2\right).$$

したがって

$$S_2 = \frac{1}{2}\left(2^{24} - S_0\right) = \frac{1}{2} \cdot \frac{2 \cdot 2^{24} - 2}{3} = \frac{2^{24} - 1}{3}.$$

与えられた値を半分にすると $2^{24} = 16777216$ であるから、

$$\binom{24}{2} + \binom{24}{5} + \cdots + \binom{24}{23} = \frac{16777215}{3} = 5592405.$$

検算

- 小さい場合：$n = 3$ のとき左辺は $1 + 1 = 2$、右辺は $\frac{1}{3}(8 + 2\cos\pi) = 2$ である。$n = 4$ のときは左辺 $1 + 4 = 5$ に対し、右辺は $\frac{1}{3}\left(16 + 2\cos\frac{4\pi}{3}\right) = \frac{1}{3}(16 - 1) = 5$ である。
- 割り切れること：$2^{25} + 1$ と $2^{24} - 1$ はどちらも 3 の倍数でなければならないが、$2 \equiv -1 \pmod 3$ であるから実際にそうなっている。
- 二項係数の和をコンピュータで直接計算した。恒等式は 199 以下のすべての n で成り立ち、1 つ目の和は 11184811、2 つ目の和は 5592405 である。

よくある間違い

- $1+\omega^2$ の偏角を $\frac{\pi}{3}$ としてしまう。これは第 4 象限にあるので、偏角の主値（principal argument）は $-\frac{\pi}{3}$（$\frac{5\pi}{3}$ としても同じ）である。
- 2^n を与える $r=3$ の場合を忘れる。
- 2 つ目の和で公式を直接使おうとする。公式は 3 の倍数の項しか与えないので、余りが 2 の項については別の考え（ここでは対称性）が必要である。

STEP のその先へ

この手法は **1 の冪根フィルター**（roots of unity filter）と呼ばれ、離散フーリエ変換（discrete Fourier transform）の最初の例である。1 の m 乗根にわたって $f(\omega^r)$ を平均すると、多項式 f の係数のうち、m を法とする指定された剰余類（residue class）に属するものが取り出される。対称性の群にわたる同様の平均は、有限群の指標理論（character theory）や、バーンサイドの補題（Burnside's lemma）のような数え上げの議論にも再び現れる。複素数がなぜこのような計算を自然なものにするのかについてさらに知りたければ、Needham の *Visual Complex Analysis*（図で見る複素解析）を参照されたい。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。