解答例

STEP I 1990、第 16 問

確率・統計 ・ 三角分布と検定

> **STEP I 1990、問 16**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/90-s1-q16

鍵となる考え方

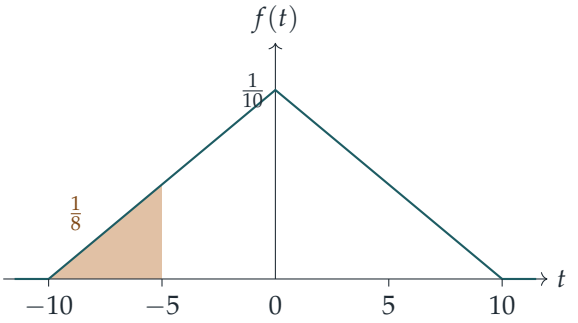
密度関数（density）は三角形の形をしているので、必要な確率はどれも小さな三角形の面積になり、累積分布関数（cumulative distribution function）がすべての仕事をしてくれる。次に気づくべきことは、午前 8 時付近に来うるバスは 8 時のバスだけだという点である。7 時のバスは 7.10 までには行ってしまっており、9 時のバスは 8.50 より前には来られない。したがって、朝に「バスに乗れる」とは、実際には「8 時のバスより先に停留所に着く」ということである。最後の小問は、パラメータが 1 つの二項分布（binomial distribution）モデルと有意性検定（significance test）の問題になる。

解答

T の密度関数

密度は $t=-10$ での 0 から $t=0$ での最大値まで直線的に増加し、その後同じ割合で減少して $t=10$ で 0 になる。よって $[-10,10]$ 上で $f(t)=k(10-|t|)$ の形をとり、それ以外では零である。全面積は底辺 20、高さ $10k$ の三角形の面積なので、$\frac{1}{2}\cdot 20\cdot 10k=1$ であり、$k=\frac{1}{100}$ を得る：

$$f(t)=\begin{cases}\dfrac{10+t}{100}, & -10\le t\le 0,\\[2mm] \dfrac{10-t}{100}, & 0\le t\le 10,\\[2mm] 0, & \text{それ以外.}\end{cases}$$



後で使うために、左半分での累積分布関数を求めておく。これは底辺 $a+10$、高さ $f(a)$ の三角形の面積である：

$$\mathrm{P}(T<a)=\tfrac{1}{2}(a+10)\cdot\frac{a+10}{100}=\frac{(a+10)^2}{200},\qquad -10\le a\le 0,$$

また $t=0$ に関する対称性より、$0\le a\le 10$ に対して $\mathrm{P}(T>a)=\dfrac{(10-a)^2}{200}$ である。図の網掛け部分の面積は $\mathrm{P}(T<-5)=\frac{25}{200}=\frac{1}{8}$ である。

午前 8.10 までにバスに乗る

バスが来るまで停留所で待つものと仮定する。8 時に来る予定のバスは午前 8 時から T 分後に到着し、$-10\le T\le 10$ である。その前のバスは 7.10 までに出発しており、次のバスは 8.50 より前には到着できない。したがって、8.10 までにバスに乗れるのは、8 時のバスが到着する前に停留所に着くときであり、かつそのときに限る。そしてこのとき、8.10 という期限は自動的に満たされる。

午前 8 時から a 分後に停留所に着いたとすると、$T>a$ のときにバスに乗れる（ちょうど $T=a$ となる確率は零である）。3 つの場合はそれぞれ次のようになる。

$$\begin{aligned}
7{\cdot}55,\ a=-5:&\quad \mathrm{P}(T>-5)=1-\tfrac{25}{200}=\tfrac{7}{8},\\
7{\cdot}58,\ a=-2:&\quad \mathrm{P}(T>-2)=1-\tfrac{64}{200}=\tfrac{17}{25},\\
8{\cdot}02,\ a=2:&\quad \mathrm{P}(T>2)=\tfrac{64}{200}=\tfrac{8}{25}.
\end{aligned}$$

停留所に着く時刻は、確率 0.5 で 7.55、確率 $0.5\times 0.8=0.4$ で 7.58、確率 $0.5\times 0.2=0.1$ で 8.02 である。寝坊はバスとは無関係なので、全確率の法則（law of total probability）により

$$\begin{aligned}
\mathrm{P}(\text{8.10 までにバスに乗る})&=0.5\cdot\tfrac{7}{8}+0.4\cdot\tfrac{17}{25}+0.1\cdot\tfrac{8}{25}\\
&=0.4375+0.272+0.032=\frac{1483}{2000}=0.7415.
\end{aligned}$$

新しい時計はずれているか

まず時計が正しいと仮定する。このとき毎朝 7.55 に停留所に着く。8 時のバスと 9 時のバスの到着時刻を、正時から何分後かで表してそれぞれ T_8、T_9 とする。これらは独立（independent）で、どちらも密度 f をもつ。午前 9 時を過ぎても待っているのは、8 時のバスに乗り遅れ（$T_8 < -5$）、**かつ** 9 時のバスが遅れる（$T_9 > 0$）ときであり、かつそのときに限る。よって、ある 1 日の朝について

$$p = \mathrm{P}(T_8 < -5)\,\mathrm{P}(T_9 > 0) = \tfrac{1}{8} \cdot \tfrac{1}{2} = \tfrac{1}{16}.$$

考えてみよう 検定はどちら向きに行うべきか。5 回というのは「多すぎる」のか、それとも「少なすぎる」のか。

時計がずれていれば、p はどちらの向きにも動きうる。時計が d 分進んでいるとしよう。すると停留所に着くのは真の時刻で $7.55 - d$ であり、時計が 9.00 を示すのは真の時刻で $9.00 - d$ である。したがって「午前 9 時」を過ぎても待っている確率は

$$g(d) = \mathrm{P}(T_8 < -5 - d)\,\mathrm{P}(T_9 > -d).$$

となる。時計が進んでいる（$d > 0$）と停留所に早く着くので、8 時のバスに乗り遅れることはまれになり、$g(d) < \frac{1}{16}$ となる。時計が少し遅れていると逆のことが起こる（たとえば $g(-2.5) \approx 0.079$）。したがって、正しい検定は両側検定（two-sided test）である。

新しい時計で午前 9 時を過ぎても待っていた朝の回数を、100 日のうち X 回とする。異なるバスの到着時刻は独立であり、毎日同じ時刻に停留所に着くので、各朝は独立な試行であり

$$H_0\colon \text{時計は正しい}, \quad X \sim \mathrm{B}(100, \tfrac{1}{16}); \qquad H_1\colon \text{時計がずれている。よって} p \neq \tfrac{1}{16}.$$

H_0 のもとでの期待値は $\mathrm{E}(X) = 6.25$ 回、分散（variance）は $\mathrm{Var}(X) = 100 \cdot \frac{1}{16} \cdot \frac{15}{16} \approx 5.86$ なので、標準偏差（standard deviation）は約 2.42 である。観測値 5 は平均をわずかに下回るだけである。正確には

$$\mathrm{P}(X \le 5) = \sum_{k=0}^{5} \binom{100}{k} p^k (1-p)^{100-k} \approx 0.40 \qquad \text{ただし} p = \tfrac{1}{16},$$

であり、連続性補正（continuity correction）を施した正規近似（normal approximation）では $\Phi((5.5 - 6.25)/2.42) = \Phi(-0.31) \approx 0.38$ となる。これは 0.025（両側 5% 検定の下側の裾）には遠く及ばず、通常用いられるどの有意水準（significance level）にも届かない。したがって H_0 は棄却されない。すなわち、**新しい時計がずれているという証拠はない**。

これは、時計が正しいという証拠があるということとは異なる。実際、密度が対称なので $g(d) = g(-5-d)$ が成り立つ（2 本のバスの役割を入れ替えればよい）。よって 5 分遅れている時計は、正しい時計とまったく同じ $p = \frac{1}{16}$ を与える。この種のデータをいくら多くの朝について集めても、この 2 つを区別することはできない。

検算

- 密度関数の面積は 1 であり、三角形の公式は f の数値積分の結果と一致する。たとえば $\mathrm{P}(T < -2) = 0.32$ である。
- 答え 0.7415 は、最良の場合 $\frac{7}{8}$（常に 7.55 に着く）と最悪の場合 0.32（常に 8.02 に着く）の間にあり、そうあるべきである。10^6 日分の朝のシミュレーションでは 0.741 を得た。
- (T_8, T_9) の組 10^6 個のシミュレーションでは、$\frac{1}{16} = 0.0625$ に対して 0.0622 を得た。また、二項分布の裾の正確な値 $\mathrm{P}(X \leq 5)$ は 0.4002 となる。

よくある間違い

- 9 時を過ぎても待つためには 8 時のバスに乗り遅れることが必要だ、という点を忘れること。答え $p = \frac{1}{2}$（単に「9 時のバスが遅れる」）は、最初の因子を無視している。
- 「8.10 までにバスに乗る」について、$T \leq 10$ を別に確かめる必要があると考えること。8 時のバスは必ず 8.10 までに到着するので、問題になるのは $T > a$ だけである。
- データがわずかに少なすぎる結果を示しているのに、「多すぎる」かどうかの片側検定（one-tailed test）を行うこと。時計がずれていれば、p はどちらの向きにも動きうる。

STEP のその先へ

この三角形の密度は、ちょうど 2 つの独立な一様確率変数（uniform random variable）の和の分布である。これは畳み込み（convolution）の最初の例であり、大学 1 年の確率論の講義では、和の密度はこの方法で求められる。最後の小問は、統計的識別可能性（identifiability）をほんの少し味わうものである。対称性 $g(d) = g(-5-d)$ は、異なる 2 つのパラメータの値がまったく同じデータを生み出すことを意味しており、どんな検定でもそれらを区別することはできない。Grimmett と Welsh の *Probability: An Introduction*（確率論入門）は、畳み込みと確率変数の和をわかりやすく扱っている。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。