解答例

STEP I 1990、第 13 問

力学 ・ 摩擦と剛体のつり合い

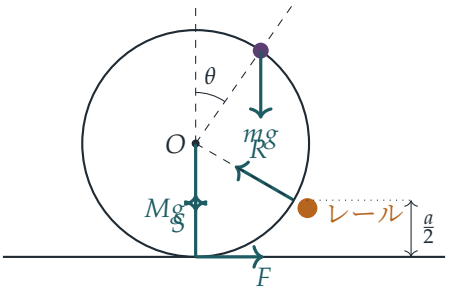
> **STEP I 1990、問 13**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/90-s1-q13

鍵となる考え方

まず質点（particle）を扱う。これは粗い斜面（rough slope）上の普通の質点であり、その斜面とは接点における円柱の接平面（tangent plane）である。次に、質点は釣り合い（equilibrium）の状態にあるので、質点が円柱に及ぼす力の合計は単にその重さであり、接点を通って鉛直下向きに働くことに注目する。円柱の中心のまわりのモーメント（moment）をとると、その力と平面からの摩擦力（friction）以外のすべての力が消える。これが最も手早い糸口である。

解答

質点を質量 m の質点、円柱を質量 M の一様な剛体（rigid body）の円柱とし、その重心（centre of mass）O は軸上にあるとしてモデル化する。レールはなめらかなので垂直抗力（normal force）のみを及ぼす。平面と円柱の表面は粗く、摩擦係数（coefficient of friction）は μ である。すべては O を通る鉛直な断面内で起こるので、以後はこの断面で考える。レールは右側に置く。



図は円柱に働く力を示している（質点の位置に働く mg については後半で説明する）。矢印の長さは実際の大きさに比例していない。

質点の釣り合い

接点 P において、外向きの法線は鉛直上向きと角 θ をなすので、そこでの接平面は水平面に対して θ だけ傾いた斜面である。質点に働く力は、重力 mg、外向き法線方向の垂直抗力（normal reaction）N、そして接線方向で斜面を上る向きの摩擦力 f である。法線方向とそれに垂直な方向に分解すると、

$$N = mg\cos\theta, \qquad f = mg\sin\theta.$$

摩擦がこれを供給できるのは $f \le \mu N$ のとき、すなわち

$$\tan\theta \le \mu, \qquad \text{同値な条件として} \qquad \theta \le \arctan\mu.$$

のときである（N が正であるためには $0 \le \theta < 90^\circ$ が必要だが、質点は円柱の上部にあるのでこれは成り立つ）。

手を離した後の円柱の釣り合い

> **考えてみよう** 質点は垂直抗力と摩擦力によって円柱を押している。これらを別々に扱う必要があるだろうか？

その必要はない。ニュートン（Newton）の第 3 法則（作用・反作用の法則）により、円柱は P において $-N$ と $-f$ を受ける。N と f は合わせて質点の重さと釣り合うので、その和は鉛直上向きの mg である。したがって、質点が円柱に及ぼす力の合計は**P に働く鉛直下向きの mg** である。その作用線（line of action）は O から水平距離 $a\sin\theta$ の位置にあり、レールの側にある。

円柱に働くその他の力は次のとおりである。

- O に働く重力 Mg。
- レールからの抗力 R。これは円柱の表面に垂直なので、半径に沿って O に向かう。レールは高さ $a/2$、すなわち O より $a/2$ 下で接しているので、この半径は鉛直下向きと 60° をなす。よって R は、レールから離れる向きの水平成分 $\frac{\sqrt{3}}{2}R$ と上向きの成分 $\frac{1}{2}R$ をもつ。
- 最下点における上向きの垂直抗力 S と水平方向の摩擦力 F（レールに向かう向きを正とする）。

O のまわりのモーメント。 Mg、R、S の作用線はすべて O を通る。質点による mg のモーメントは $mg\,a\sin\theta$（円柱をレールの方へ回転させる向き）であり、F は O の距離

a 下で逆向きに働く。よって

$$Fa = mg\,a\sin\theta \quad \Longrightarrow \quad F = mg\sin\theta.$$

これは正なので、摩擦力は図のとおりレールに向かって働く（レールがなければ円柱はレールの側へ転がるだろう。だからこそ、レールが役に立つためには質点がその側になければならないのである）。

水平方向に分解すると：$\frac{\sqrt{3}}{2}R = F$ なので、

$$R = \frac{2mg\sin\theta}{\sqrt{3}} > 0,$$

これはレールが押すことしかできないことと矛盾しない。

鉛直方向に分解すると：

$$S = (M+m)g - \tfrac{1}{2}R = (M+m)g - \frac{mg\sin\theta}{\sqrt{3}},$$

$\sin\theta < 1 < \sqrt{3}$ かつ $M > 0$ なのでこれは正であり、円柱は平面から離れない。

平面が摩擦力を供給できるのは $F \le \mu S$ のときである：

$$m\sin\theta \le \mu\left[(M+m) - \frac{m\sin\theta}{\sqrt{3}}\right] \iff m\sin\theta\left(\sqrt{3}+\mu\right) \le \sqrt{3}\,\mu\,(M+m).$$

したがって、手を離した後に両方の物体が釣り合いを保てるのは、$\tan\theta \le \mu$ と

$$\boxed{\sin\theta \le \frac{\sqrt{3}\,\mu\,(M+m)}{m\,(\sqrt{3}+\mu)}}$$

がともに成り立つときである（なめらかなレールでは摩擦は必要なく、質点と円柱の間の摩擦は前半で扱った）。

最後の小問

$m = 7M$、$\mu = \frac{3}{4}$ のとき、質点の条件は $\tan\theta \le \frac{3}{4}$、すなわち $\sin\theta \le \frac{3}{5}$ である。円柱の条件は

$$\sin\theta \le \frac{\sqrt{3}\cdot\frac{3}{4}\cdot 8M}{7M\,(\sqrt{3}+\frac{3}{4})} = \frac{24\sqrt{3}}{7(4\sqrt{3}+3)} = \frac{24\sqrt{3}\,(4\sqrt{3}-3)}{7\cdot 39} = \frac{24(4-\sqrt{3})}{91}.$$

どちらがより厳しいだろうか？

$$\frac{24(4-\sqrt{3})}{91} < \frac{3}{5} \iff 120(4-\sqrt{3}) < 273 \iff 207 < 120\sqrt{3} \iff 42849 < 43200,$$

であり、これは正しい。したがって、円柱が平面上で滑ることが（ぎりぎりではあるが）効いてくる制約であり、釣り合いが保たれる θ の最大値は

$$\theta_{\max} = \arcsin\frac{24(4-\sqrt{3})}{91} \approx 36.7^\circ,$$

であって、$\arctan\frac{3}{4} \approx 36.9^\circ$ をわずかに下回る。

検算

- 極限の場合 $M \to \infty$：非常に重い円柱は常に摩擦で支えられるので、円柱の条件は自明に成り立つものとなり、$\tan\theta \le \mu$ だけが残る。
- $\theta \to 0$ のとき、質点は頂上にあり、その重さの作用線は O を通り、$F = R = 0$ となる。予想どおり、レールも摩擦も必要ない。
- 数値的に、M, m, a, μ, θ を 20 000 通りランダムに選び、力のベクトルそのものから 3 つの釣り合いの式を解くと、毎回枠で囲んだ条件と一致する。$m = 7M$、$\mu = 0.75$ のとき θ を細かく走査すると $\theta_{\max} \approx 36.737^\circ$、$\sin\theta_{\max} \approx 0.59814$ が得られる。

よくある間違い

- レールからの力を水平とみなしてしまう。この力は円柱の表面に垂直なので半径に沿った向きであり、ここでは水平から 30° 上向きである。
- レールからの力の上向き成分 $\frac{1}{2}R$ を忘れてしまう。これは S を減らし、したがって平面から得られる摩擦力を減らす。
- 円柱の条件と比較せずに $\theta = \arctan\frac{3}{4}$ で止めてしまう。円柱の条件のほうが（わずかに）厳しい。

STEP のその先へ

ここで役立った工夫、すなわち質点の接触力を、その重さに等しい 1 つの合力（resultant）で置き換えることは、剛体に働く任意の力の系は、選んだ点を通る 1 つの力と 1 つの偶力（couple）に帰着されるという考え方の最初の一端である。摩擦を伴う接触を複数もつ剛体の静力学（statics）は大学 1 年次の標準的な題材であり、どの接触点が最初に滑るかという問題は、釣り合いの式だけでは摩擦力が決まらない、より微妙な問題へとつながっていく。Kleppner と Kolenkow の *An Introduction to Mechanics*（力学入門）は、力、トルク、剛体の釣り合いを丁寧に扱っている。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。