解答例

STEP I 1990、第 12 問

力学 ・ ばねとエネルギー

STEP I 1990、問 12

先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：

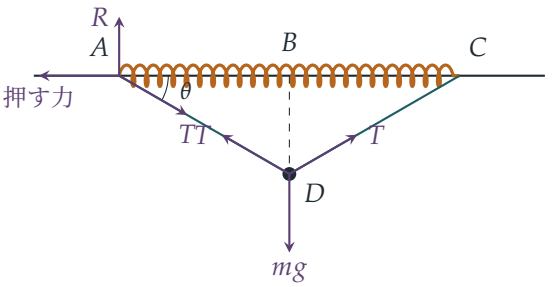
step.maths.org/questions/90-s1-q12

鍵となる考え方

ここでは質点以外はすべて軽い（light）ので、両端 A と C にはたらく力は厳密につり合っていなければならない。すなわち、各端で糸が水平に引く力は、縮んだばね（spring）が押す力に等しい。これが平衡（equilibrium）の条件を与える。運動については、エネルギーを用いるのが自然である。運動エネルギー（kinetic energy）をもつのは質点だけなので、質点が静止するのは、位置エネルギー（potential energy）がちょうど最初の値に戻るときである。

解答

モデル化。ばねと糸は軽く、糸は伸びない（inextensible）。また棒はなめらか（smooth）なので、棒がばねに及ぼす力は鉛直方向のみである。B を通る鉛直線に関する対称性から、質点 D は常に B の真下にあり、$AD = DC = l$ である。糸の各半分の張力（tension）を T、各半分が棒となす角を θ とする。



平衡

$\theta = \pi/6$ のとき、AC の半分の長さは $l\cos\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}l$ であるから、

$$AC = \sqrt{3}\,l < 2l,$$

となり、ばねは $(2-\sqrt{3})l$ だけ縮んでいる。フックの法則（Hooke's law）により、ばねは A（および C）を外向きに次の大きさの力（thrust）で押す。

$$\frac{\lambda(2-\sqrt{3})l}{2l} = \lambda\left(1 - \frac{\sqrt{3}}{2}\right).$$

D において鉛直方向に分解すると：$2T\sin\frac{\pi}{6} = mg$ より $T = mg$ である。

A において水平方向に分解すると：

> **考えてみよう** A には何もないのに、なぜ A で力のつり合いを考えてよいのだろうか？

ばねの端は軽い点である。質量 0 の物体に合力がはたらけば加速度は無限大になってしまうので、そこにはたらく力は（平衡状態に限らず）各瞬間に必ずつり合っていなければならない。棒はなめらかなので抗力（reaction）R は鉛直であり、水平方向には糸とばねの力だけがはたらく。

$$T\cos\frac{\pi}{6} = \lambda\left(1 - \frac{\sqrt{3}}{2}\right) \quad\Longrightarrow\quad mg\,\frac{\sqrt{3}}{2} = \lambda\,\frac{2-\sqrt{3}}{2},$$

よって

$$mg = \lambda\,\frac{2-\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = \lambda\left(\frac{2}{\sqrt{3}} - 1\right),$$

となり、示すべき式が得られた。

位置エネルギー

$AC = 2xl$ とおくと、糸がぴんと張っている間は $0 < x \le 1$ である。AC の半分は xl、$AD = l$ であるから、三平方の定理（Pythagoras）により D は棒から

$$BD = l\sqrt{1-x^2}$$

の深さにある。ばねの伸びは $2xl - 2l$ なので、弾性エネルギー（elastic energy）は $\frac{\lambda(2l-2xl)^2}{2\cdot 2l} = \lambda l(1-x)^2$ である。棒の高さを重力による位置エネルギーの基準とすると、

$$V(x) = \lambda l(1-x)^2 - mgl\sqrt{1-x^2}.$$

整合性を確かめておく。

$$V'(x) = -2\lambda l(1-x) + \frac{mglx}{\sqrt{1-x^2}},$$

であり、$x = \frac{\sqrt{3}}{2}$（このとき $\cos\theta = x$ より $\theta = \frac{\pi}{6}$）でこれが 0 になるのは、ちょうど $mg\sqrt{3} = \lambda(2-\sqrt{3})$ のときである。これは上で求めた条件そのものである。

B からの落下

はじめ質点は B にあるので、糸は棒に沿っており、$AC = 2l$、$x = 1$ である。このとき $V(1) = 0$ であり、系は静止状態から動き出す。

棒はなめらかで糸は伸びないので、エネルギーは失われない。また、ばねと糸は軽いので、運動エネルギーは質点の $\frac{1}{2}mv^2$ だけである。したがって運動の間つねに

$$\tfrac{1}{2}mv^2 + V(x) = V(1) = 0.$$

考えてみよう「静止する」が意味するのは、なぜ $V'(x) = 0$ ではなく $V(x) = 0$ なのだろうか？

質点が静止するのは $v = 0$ のときであり、エネルギー保存則により、これは $V(x) = 0$ を意味する。条件 $V'(x) = 0$ は平衡を表し、そこは質点が止まる場所ではなく、**最も速く**動く場所である。よって x は次を満たす。

$$\lambda(1-x)^2 = mg\sqrt{1-x^2}, \qquad \text{すなわち} \qquad (1-x)^2 = \left(\frac{2}{\sqrt{3}} - 1\right)\sqrt{1-x^2}.$$

解 $x = 1$ は出発点である。$x < 1$ のときは $\sqrt{1-x} > 0$ で割ってから 2 乗してよく、より扱いやすい三次方程式（cubic）が得られる。

$$(1-x)^3 = k^2(1+x), \qquad k = \frac{2}{\sqrt{3}} - 1 \approx 0.15470, \quad k^2 \approx 0.023932.$$

$(1-x)^{3/2} = k\sqrt{1+x}$ の両辺はともに正なので、ここで 2 乗しても問題はない。$f(x) = (1-x)^3 - k^2(1+x)$ とおくと、

$$f(0.65) = 0.042875 - 0.039488 \approx +0.0034,$$
$$f(0.66) = 0.039304 - 0.039727 \approx -0.0004,$$

となるので、0.65 と 0.66 の間、それも 0.66 のごく近くに解がある。$f'(x) = -3(1-x)^2 - k^2 < 0$ より f は狭義単調減少であるから、$x < 1$ の範囲の解はこれだけである。質点が次に静止するのは $x \approx 0.66$（より正確には $x \approx 0.6589$）のときであり、そのとき D は棒から約 $0.75l$ の深さにある。

検算

- $\theta = \pi/6$ で $\lambda = l = m = 1$、$g = \frac{2}{\sqrt{3}} - 1$ とすると、A における水平方向の引く力とばねの押す力はともに 0.13397 に等しく、$x = \frac{\sqrt{3}}{2}$ における V の数値微分は 0 になる（さらに $V'' > 0$ なので、この平衡は安定（stable）である）。

- 二分法（bisection）により解 $x = 0.658861$ が得られる。また、D の深さ y についての運動方程式 $m\ddot{y} = mg - 2\lambda(1-x)\,y/(lx)$ を、$y = 0$ での静止状態から（RK4 で）数値的に解き進めると、質点が最初に止まるのは $x = 0.658861$ であり、結果は一致する。
- 平衡の値 $x = \frac{\sqrt{3}}{2} \approx 0.866$ は 0.66 と 1 の間にあるが、これは当然である。質点は平衡位置のまわりで振動するからである。

よくある間違い

- ばねが伸びていると考えてしまう。ここでは $AC < 2l$ なので、ばねは縮んでおり、A と C を互いに離れる向きに押している。
- 静止位置を求めるのに $V'(x) = 0$ とおいてしまう。これで得られるのは平衡位置であり、そこでは速さが最大になる。
- 棒より下では重力による位置エネルギーが**負**であることを忘れる。そうするとエネルギーの式は $(0,1)$ に解をもたなくなってしまう。

STEP のその先へ

質量のない物体にはたらく合力は o でなければならないという考え方は、運動の法則ではなく拘束（constraint）である。このような問題は、ラグランジュ（Lagrange）力学（Lagrangian mechanics）を用いると最もすっきり扱える。ラグランジュ力学では、ただ一つの座標（ここでは x）でエネルギー関数を一つ書き下せばよく、拘束力は一切現れない。また、位置エネルギー $V(x)$ からは、V'' を通して平衡位置のまわりの微小振動（small oscillations）の周期も得られる。Kleppner と Kolenkow の *An Introduction to Mechanics*（力学入門）は、エネルギーを用いる方法と微小振動をこうした考え方で扱っている。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。