解答例

STEP I 1990、第 11 問

力学 ・ 放物運動と運動量

> **STEP I 1990、問 11**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/90-s1-q11

鍵となる考え方

過程は 3 つの段階に分かれる。飛行の最高点までの通常の放物運動（projectile motion）、瞬間的な衝突（受け止め）、そして瞬間的な「爆発」（押し出し）である。2 つの瞬間的な段階の間、重力が作用する時間はないので、砲弾とスーパーマンからなる系の運動量（momentum）は、各方向ごとに別々に保存される。その後、砲弾は再び放物運動をする物体となり、既知の高さから既知の下向きの速さで運動を始める。

解答

砲弾とスーパーマンを質点（particle）としてモデル化し、空気抵抗（air resistance）は無視する。また、砲弾は水平な地面から発射され、水平な地面に着地するものとする。x を運動の向きの水平方向、y を鉛直上向きにとる。

飛行の最高点まで

砲弾の初速度の成分は

$$u_x = v\cos\tfrac{\pi}{3} = \tfrac{1}{2}v, \qquad u_y = v\sin\tfrac{\pi}{3} = \tfrac{\sqrt{3}}{2}v.$$

である。最高点では鉛直方向の速度が 0 になるので、そこまでにかかる時間と到達する高さは

$$t_1 = \frac{u_y}{g} = \frac{\sqrt{3}\,v}{2g}, \qquad H = \frac{u_y^2}{2g} = \frac{3v^2}{8g}.$$

である。この瞬間、砲弾は速さ $\frac{1}{2}v$ で水平に運動している。

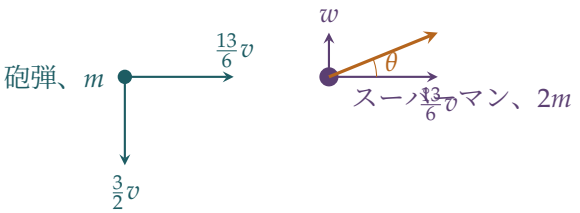
受け止め

スーパーマンは速さ $3v$ で水平に運動しながら砲弾を後ろから受け止め、両者は一体となって運動する。（瞬間的な）受け止めの間、水平方向の運動量は保存されるので、共通の速さを V とすると

$$2m(3v) + m\left(\tfrac{1}{2}v\right) = 3mV \quad \Longrightarrow \quad V = \frac{13v}{6}.$$

となる。この瞬間、どちらも鉛直方向の速度をもたないので、全体の鉛直方向の運動量は 0 である。

押し出し



次にスーパーマンは砲弾を真下に押し出す。この押し出しは内力による力積（impulse）なので、2 つの物体の運動量の総和はどちらの方向にも変化しない。

水平方向：砲弾は水平方向の速さ $\frac{13}{6}v$ を保つ。水平方向の運動量の総和は依然として $3m \cdot \frac{13}{6}v$ であるから、スーパーマンも水平方向の速さ $\frac{13}{6}v$ を保つ。（力積は鉛直方向なので、これは驚くことではない。）

鉛直方向：鉛直方向の運動量の総和は 0 であったから、スーパーマンが速さ w で上向きに運動するとすれば

$$2m\,w - m\left(\tfrac{3}{2}v\right) = 0 \quad \Longrightarrow \quad w = \tfrac{3}{4}v.$$

である。

> **考えてみよう** 重力が常に作用しているのに、なぜ運動量保存則（conservation of momentum）を使えるのだろうか？

受け止めと押し出しは瞬間的に起こる。重力は有限の力なので、長さ 0 の時間間隔における重力の力積は 0 である。問題になるのはスーパーマンと砲弾の間にはたらく、非常に大きく短時間しか続かない内力（internal force）だけであり、それらは対になって打ち消し合う。

砲弾の残りの飛行

砲弾は今度は高さ $H = \frac{3v^2}{8g}$ から、鉛直下向きの速さ $\frac{3}{2}v$ で運動を始める。下向きに s を測ると、砲弾は時間 t_2 後に地面に達する。ここで t_2 は

$$\tfrac{3}{2}v\,t_2 + \tfrac{1}{2}gt_2^2 = \frac{3v^2}{8g}.$$

を満たす。両辺に $8g$ を掛けると、gt_2 についての二次方程式（quadratic equation）が得られる。

$$4(gt_2)^2 + 12v(gt_2) - 3v^2 = 0 \quad\Longrightarrow\quad gt_2 = \frac{-12v + \sqrt{144v^2 + 48v^2}}{8} = \frac{-12 + 8\sqrt{3}}{8}\,v,$$

ただし $t_2 > 0$ なので正の解をとった。よって

$$t_2 = \left(\sqrt{3} - \tfrac{3}{2}\right)\frac{v}{g}.$$

である。（$\sqrt{3} \approx 1.732 > 1.5$ なので、これは正である。）飛行時間の合計は

$$\begin{aligned} T = t_1 + t_2 &= \frac{\sqrt{3}}{2}\,\frac{v}{g} + \left(\sqrt{3} - \frac{3}{2}\right)\frac{v}{g} \\ &= \frac{3(\sqrt{3}-1)}{2}\,\frac{v}{g} \;\approx\; 1.10\,\frac{v}{g}. \end{aligned}$$

である。

スーパーマンの向き

押し出しの直後、スーパーマンの速度の成分は水平方向に $\frac{13}{6}v$、上向きに $\frac{3}{4}v$ である。したがって、スーパーマンの軌道は水平から上向きに角 θ の方向へ始まり、

$$\tan\theta = \frac{\frac{3}{4}v}{\frac{13}{6}v} = \frac{9}{26}, \qquad \theta = \arctan\frac{9}{26} \approx 19.09^\circ,$$

となる。よって、この角は 1 度単位に丸めると 19° である。

検算

- スーパーマンがいなければ、砲弾は時刻 $2t_1 = \sqrt{3}\,v/g \approx 1.73\,v/g$ に着地する。下に押し出せば飛行時間は短くなるはずであり、実際 $T \approx 1.10\,v/g$ はこれより小さい。
- 質量比：砲弾の質量はスーパーマンの半分なので、砲弾はスーパーマンの 2 倍の鉛直方向の速さを逆向きに得るはずである。実際そうなっている：$\frac{3}{2}v = 2 \times \frac{3}{4}v$。

- 数値的に、$v = 13.7$、$g = 9.81$ として、高さ H からの砲弾の落下を刻み幅 10^{-6} で追跡すると $t_2 \approx 0.32407\,\mathrm{s}$ となり、$(\sqrt{3} - \frac{3}{2})v/g$ と一致する。また $T \approx 1.5335\,\mathrm{s} = 1.0981\,v/g$ である。

よくある間違い

- 受け止めを忘れること：押し出しの後の水平方向の速さとして、共通の速さ $\frac{13}{6}v$ ではなく、砲弾自身の $\frac{1}{2}v$ やスーパーマンの $3v$ を使ってしまう。
- 質量を無視して、スーパーマンの上向きの速さを $\frac{3}{2}v$ としてしまう。
- 二次方程式の負の解をとってしまう。あるいは t_2 を t_1 ではなく $2t_1$ に加えてしまう。

STEP のその先へ

受け止めは完全非弾性衝突（perfectly inelastic collision）であり、押し出しはその逆過程である爆発である。同じ保存則がどちらの向きにも成り立つ一方、運動エネルギー（kinetic energy）は前者では失われ、後者では供給される。大学 1 年次の講義では、これは撃力（impulsive force）の一般理論、そして系の重心（centre of mass）の理論へと発展する。重心の運動は、各部分が互いにどれほど激しく押し合っても、外力だけによって決まる。Kleppner と Kolenkow の *An Introduction to Mechanics*（力学入門）は、運動量、力積、重心をこうした精神で扱っている。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。