解答例

STEP I 1990、第 10 問

力学 ・ 仕事率と抵抗

> **STEP I 1990、問 10**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/90-s1-q10

鍵となる考え方

「一定の速さ」とは加速度（acceleration）がないということであり、したがって走者の駆動力（driving force）は抵抗（resistance）とちょうどつり合い、仕事率（power）は駆動力と速さの積である。唯一の微妙な点は、空気抵抗（air resistance）が**空気に対する**速さ（相対速度、relative speed）に依存し、それが往路と復路とで異なることである。問題の後半では、仕事率ではなく全エネルギー（total energy）に注目するとよい。各区間で消費されるエネルギーは抵抗と距離の積であり、これによって一定のエネルギー予算が二つの速さについての一次の条件（linear condition）に変わる。

解答

一定の速さとレースの所要時間

走者を直線上を動く質点（particle）としてモデル化する。ある区間における走者の地面に対する速さを v（単位 $\mathrm{m\,s^{-1}}$）、走者が生み出す前向きの駆動力を D（単位 N）とする。抵抗は 50 N と $2w$ N であり、それぞれ地面に対する運動、空気に対する運動を妨げる向きにはたらく。



走路に沿った方向に力を分解すると、一定のペースでは加速度は 0 であるから、

$$D = 50 + 2w.$$

走者が仕事をする割合は、駆動力とその作用点の速さの積であるから、$300 = Dv$ である。

往路。風は走者の進行方向に $3\,\mathrm{m\,s^{-1}}$ で吹いている。$v > 3$ ならば、走者は空気に対して前向きに $w = v - 3$ の速さで動き、空気抵抗は後ろ向きにはたらく（$v > 3$ であることは後で確かめる）。このとき $D = 50 + 2(v-3) = 44 + 2v$ であり、

$$v_1(44 + 2v_1) = 300 \iff v_1^2 + 22v_1 - 150 = 0 \iff v_1 = -11 + \sqrt{271} \approx 5.462,$$

ただし正の解をとった。これは確かに 3 より大きいので、仮定は成り立つ（別の見方として、$v = 3$ では空気抵抗がなく、必要な仕事率は $3 \times 50 = 150 < 300\,\mathrm{W}$ にすぎないので、走者は風より速く走らなければならない）。

復路。今度は走者は向かい風の中を走るので、$w = v + 3$、$D = 50 + 2(v+3) = 56 + 2v$ である：

$$v_2(56 + 2v_2) = 300 \iff v_2^2 + 28v_2 - 150 = 0 \iff v_2 = -14 + \sqrt{346} \approx 4.601.$$

所要時間。スタート時と折り返し時の加速を無視すると、

$$T_0 = \frac{5000}{v_1} + \frac{5000}{v_2} \approx 915.4 + 1086.7 = 2002.1,$$

よって、レースの所要時間は秒単位に丸めて $2002\,\mathrm{s}$（約 33 分 22 秒）である。

別の戦術

代わりに、走者が往路では $x_1\,\mathrm{W}$、復路では $x_2\,\mathrm{W}$ の仕事率で走り、一定の速さがそれぞれ v_1、v_2 であるとする。力のつり合いは変わらないので、$v_1 > 3$ である限り、

$$x_1 = v_1(44 + 2v_1), \qquad x_2 = v_2(56 + 2v_2).$$

往路にかかる時間は $5000/v_1$ であるから、そこで使われるエネルギーは

$$x_1 \cdot \frac{5000}{v_1} = 5000(44 + 2v_1),$$

であり、これは当然のことながら、まさに抵抗と距離の積である。同様に、復路で使われるエネルギーは $5000(56 + 2v_2)$ である。したがって全エネルギーは

$$E = 5000(100 + 2(v_1 + v_2)).$$

考えてみよう 一定の全エネルギーという条件はどこで効いてくるか。

走者は元のレースと同じ全エネルギーを使わなければならないので、E は定数である。E は $v_1 + v_2$ を通してのみ速さに依存するので、この和は

$$v_1 + v_2 = \frac{E}{10\,000} - 50,$$

と定まり、x_1 と x_2 をどう選んでも変わらない。これで結果が証明された。その値は元のレースから得られるものであり、

$$S = v_1 + v_2 = \sqrt{271} + \sqrt{346} - 25 \approx 10.063.$$

最善の戦術。このときレースの所要時間は

$$T = 5000\left(\frac{1}{v_1} + \frac{1}{v_2}\right) = \frac{5000\,(v_1+v_2)}{v_1 v_2} = \frac{5000\,S}{v_1 v_2}.$$

S が一定であるから、これは $v_1 v_2$ が最大のとき最小になる。相加平均・相乗平均の不等式（AM–GM inequality）より $v_1 v_2 \le \left(\frac{S}{2}\right)^2$ であり、等号が成り立つのは $v_1 = v_2 = \frac{S}{2}$ のときに限る。よって最善の計画は、往復とも同じ速さ $\frac{S}{2} \approx 5.032\,\mathrm{m\,s^{-1}}$ で走ることである。これは依然として風より速いので、往路の x_1 の式はそのまま有効である。最小の所要時間は

$$T_{\min} = \frac{5000\,S}{S^2/4} = \frac{20\,000}{S} \approx 1987.4\ \mathrm{s}.$$

走者が短縮できる時間は $T_0 - T_{\min} \approx 2002.1 - 1987.4 = 14.7\,\mathrm{s}$ であり、求めるとおり約 15 秒である。仕事率は往路で約 $x_1 \approx 272\,\mathrm{W}$、復路で約 $x_2 \approx 332\,\mathrm{W}$ となる。すなわち、走者は追い風のときには力を抜き、向かい風のときにはより頑張るのである。

検算

- エネルギーの整合性：$300 \times 2002.105 \approx 600\,632\,\mathrm{J}$ であり、$5000(100 + 2 \times 10.0632) \approx 600\,632\,\mathrm{J}$ とも一致する。
- 風がなければ、どちらの区間でも $v^2 + 25v - 150 = 0$ となるので $v = 5$ であり、二つの方法は一致する。時間の短縮を可能にしているのは風である。
- x_1 を無作為に 1000 通り選び（x_2 はエネルギー予算から定まる）、$v_1 + v_2 = 10.0632$ となること、どの選び方も 1987.4 s を下回らないこと、短縮時間が 14.66 s であることを数値的に確認した。

よくある間違い

- 空気抵抗の項に、空気に対する速さではなく地面に対する速さを使ってしまう、あるいは一方の区間で風の符号を逆にしてしまう。
- 往復で**仕事率**を等しくするのが公平だと考えてしまう。所要時間を最小にするのは、往復で**速さ**を等しくすることである。
- 仕事率の式だけから $v_1 + v_2$ が一定であることを証明しようとする。一定の全エネルギーという条件が必要である。

STEP のその先へ

最後の部分は小さな制約付き最適化（constrained optimisation）の問題である：一次の制約条件のもとで $1/v_1 + 1/v_2$ を最小化する。ここでは相加平均・相乗平均の不等式で決着がつくが、一般的な道具は大学 1 年次の講義で学ぶラグランジュの未定乗数法（method of Lagrange multipliers）であり、同じ考え方が自転車競技やボート競技における最適なペース配分を支配している。仕事、仕事率、抗力（drag force）についての丁寧な解説は、Kleppner and Kolenkow, *An Introduction to Mechanics*（力学入門）を参照するとよい。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。