解答例

STEP I 1990、第 1 問

純粋数学 ・ 三角関数の最適化

> **STEP I 1990、問 1**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/90-s1-q1

鍵となる考え方

ブラインドのすべての頂点は中心 D から距離 r にある。したがって、半径 DX と DY によって、四角形（quadrilateral）は D を頂点とする 3 つの二等辺三角形（isosceles triangle）に分割される。それぞれの面積は $\frac{1}{2}r^2\sin(\text{頂角})$ であり、3 つの頂角（apex angle）の和は π である。これにより、幾何の問題は正弦の和を最大化する問題に帰着し、和積の公式（sum-to-product formula）を使えば、前半は微分を一切使わずに解ける。

解答

ブラインドの面積

A, D, C は一直線上にある（collinear）から、D における角は

$$\angle ADX + \angle XDY + \angle YDC = \pi, \qquad \text{よって} \qquad \angle YDC = \pi - \theta - \alpha.$$

を満たす。ここで $\theta \geq 0, \alpha > 0, \theta + \alpha \leq \pi$ であり、X と Y は弧の上に A, X, Y, C の順に並ぶ。

半径 DX と DY によって、ブラインド $AXYC$ は三角形 ADX, XDY, YDC に分割される。いずれも長さ r の 2 辺が D で交わる三角形である。それぞれに面積 $= \frac{1}{2}ab\sin C$ を用いると、

$$\begin{aligned} \text{面積} &= \tfrac{1}{2}r^2\sin\theta + \tfrac{1}{2}r^2\sin\alpha + \tfrac{1}{2}r^2\sin(\pi - \theta - \alpha) \\ &= \tfrac{1}{2}r^2[\sin\alpha + \sin\theta + \sin(\theta + \alpha)], \end{aligned}$$

となる。ここで $\sin(\pi - u) = \sin u$ を用いた。

α を固定したときの最適な θ

α を固定すると、変化するのは $\sin\theta+\sin(\theta+\alpha)$ のみである。和積の公式 $\sin P+\sin Q=2\sin\frac{P+Q}{2}\cos\frac{P-Q}{2}$ により、

$$\sin\theta+\sin(\theta+\alpha)=2\cos\tfrac{\alpha}{2}\,\sin\!\left(\theta+\tfrac{\alpha}{2}\right).$$

考えてみよう なぜこの変形によって最大値が明らかになるのか。

$0<\frac{\alpha}{2}<\frac{\pi}{2}$ であるから、因子 $2\cos\frac{\alpha}{2}$ は正の定数である。よって、面積が最大になるのは、ちょうど $\sin(\theta+\frac{\alpha}{2})$ が最大になるときである。θ が $[0,\pi-\alpha]$ を動くとき、角 $\theta+\frac{\alpha}{2}$ は $[\frac{\alpha}{2},\pi-\frac{\alpha}{2}]$ を動き、この区間は $\frac{\pi}{2}$ を含む。したがって正弦は $\theta+\frac{\alpha}{2}=\frac{\pi}{2}$ のとき、とりうる最大値 1 に達する。すなわち

$$\boxed{\theta=\frac{\pi}{2}-\frac{\alpha}{2}=\frac{\pi-\alpha}{2}.}$$

このとき $\angle YDC=\pi-\theta-\alpha=\frac{\pi-\alpha}{2}=\theta$ でもある。つまり最適なブラインドは鉛直な半径に関して対称（symmetric）であり、これは直観とも一致する。この α に対する最大面積は

$$\tfrac{1}{2}r^2\left[\sin\alpha+2\cos\tfrac{\alpha}{2}\right].$$

である。

α を動かす

次に、$0<\alpha<\pi$ において $f(\alpha)=\sin\alpha+2\cos\frac{\alpha}{2}$ を最大化する。（各 α に対する最大面積は $\frac{1}{2}r^2f(\alpha)$ であるから、全体での最大面積は f の最大値の $\frac{1}{2}r^2$ 倍である。）微分すると、

$$f'(\alpha)=\cos\alpha-\sin\tfrac{\alpha}{2}.$$

$s=\sin\frac{\alpha}{2}$ とおくと $0<s<1$ であり、$\cos\alpha=1-2\sin^2\frac{\alpha}{2}$ を用いると

$$f'(\alpha)=1-s-2s^2=(1-2s)(1+s).$$

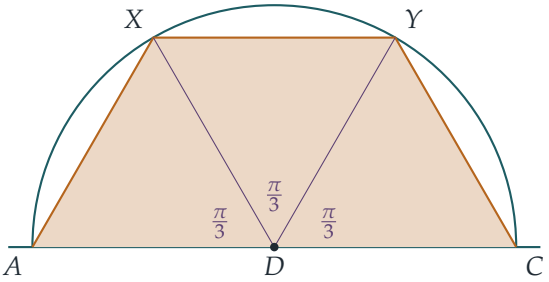
$1+s>0$ であるから、f' の符号は $1-2s$ の符号と一致する。$(0,\pi)$ において s は α とともに増加するので、f' は $s<\frac{1}{2}$ で正、$s>\frac{1}{2}$ で負である。よって f は増加したのち減少し、$\sin\frac{\alpha}{2}=\frac{1}{2}$、すなわち $\alpha=\frac{\pi}{3}$ で最大値をとる。このとき

$$f\!\left(\tfrac{\pi}{3}\right)=\sin\tfrac{\pi}{3}+2\cos\tfrac{\pi}{6}=\tfrac{\sqrt{3}}{2}+\sqrt{3}=\tfrac{3\sqrt{3}}{2},$$

であるから、ブラインドの面積の最大値は

$$\boxed{\tfrac{1}{2}r^2\cdot\tfrac{3\sqrt{3}}{2}=\frac{3\sqrt{3}}{4}\,r^2.}$$

である。このとき $\alpha = \theta = \angle YDC = \frac{\pi}{3}$ であるから、3 つの三角形はいずれも正三角形であり、ブラインドは円全体に内接する（inscribed）正六角形（regular hexagon）のちょうど半分になる。



検算

- 極端な場合（limiting cases）：$\alpha \to 0$ のとき、ブラインドは X を頂上にもつ三角形 AXC となり、面積は $\frac{1}{2} \cdot 2r \cdot r = r^2$ である。実際 $\frac{1}{2}r^2 f(0) = r^2$ となる。$\alpha \to \pi$ のときはブラインドが直径の上につぶれ、$f(\pi) = 0$ となる。最大値 $\frac{3\sqrt{3}}{4}r^2 \approx 1.299r^2$ はこの両方より大きく、また当然ながら半円（semicircle）の面積 $\frac{\pi}{2}r^2 \approx 1.571r^2$ より小さい。
- 数値による確認：X と Y の位置をランダムにとり、3 つの三角形による公式を靴ひも公式（shoelace formula）と照合した。また、いくつかの α の値について細かいグリッド探索で最適な θ を求め、さらに $r = 1$ として θ と α を同時に探索すると、最大面積は $1.299038\ldots = \frac{3\sqrt{3}}{4}$ となることを確かめた。

よくある間違い

- 3 つ目の三角形 YDC を忘れる、あるいはその角を $\pi - \theta - \alpha$ ではなく $\pi - \alpha$ としてしまう。
- 後半で、根拠を示さずに $\theta = \alpha = \frac{\pi}{3}$ という近道を使ってしまう。最適なブラインドが本当に正六角形の半分であることを示すには、微分（あるいは対称性による議論）が必要である。

STEP のその先へ

この答えは古典的な事実の特別な場合である。すなわち、円に内接するすべての n 角形のうち、面積が最大になるのは正 n 角形である。巧みな証明の一つは、$[0, \pi]$ における

sin の凹性（concavity）とイェンセン（Jensen）の不等式（Jensen's inequality）を用いるものである。中心角（central angle）$\phi_1, \ldots, \phi_n$ の和が 2π ならば、$\sum \sin \phi_i \leq n \sin \frac{2\pi}{n}$ が成り立つ。今回のブラインドは $n = 6$ の場合の半分である。この種の凸性（convexity）や不等式は、大学 1 年次の解析学（analysis）で繰り返し現れるテーマである。Abbott の *Understanding Analysis*（解析学入門）はこれらをきちんと学ぶのに適した一冊であり、Siklos の *Advanced Problems in Mathematics*（発展的な数学の問題集）には同じ趣旨の STEP の問題がさらに収められている。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。