解答例

STEP III 1989、第 9 問

純粋数学 • べき級数の和

> **STEP III 1989、問 9**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/89-s3-q9

鍵となる考え方

どの級数も、よく知られたべき級数（power series）$\sum a_r x^r$ に特定の x を代入したものである。したがって、なすべきことはそれがどの級数かを見抜くことである。最初の二つの級数の元になるのは等比級数（geometric series）$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \cdots$ である。これを微分すると因子 r が前に出て、積分すると r で割られる。三つ目については、奇数の積を階乗で割ったものは、負の分数べきの二項展開（binomial expansion）から現れるものである。

解答

以下では一貫して、$|x| < 1$ に対して

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots = \sum_{r=1}^{\infty} x^{r-1}.$$

を用いる。問題文に収束（convergence）について考える必要はないとあるので、遠慮なく項別に微分・積分する。（実際、用いる三つの x の値はいずれも収束区間の十分内側にあるので、この操作は正当である。）

小問 (i)

一般項は $r\left(\frac{1}{2}\right)^{r-1}$ であるから、$x = \frac{1}{2}$ における $\sum r x^{r-1}$ を求めればよい。等比級数を項別に微分すると、

$$\sum_{r=1}^{\infty} r x^{r-1} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{1}{1-x}\right) = \frac{1}{(1-x)^2}.$$

$x = \frac{1}{2}$ を代入すると、

$$1 + \frac{2}{2} + \frac{3}{2^2} + \frac{4}{2^3} + \cdots = \frac{1}{\left(\frac{1}{2}\right)^2} = 4.$$

小問 (ii)

一般項は $\frac{1}{r}\left(\frac{1}{2}\right)^{r-1}$ である。r で割る操作は微分によって打ち消されるので、今度は積分する。等比級数を 0 から x まで積分すると、

$$\sum_{r=1}^{\infty} \frac{x^r}{r} = \int_0^x \frac{\mathrm{d}t}{1-t} = -\ln(1-x).$$

ここでは指数が一つ大きすぎるので、（$x \neq 0$ のとき）x で割る：

$$\sum_{r=1}^{\infty} \frac{1}{r} x^{r-1} = -\frac{\ln(1-x)}{x}.$$

$x = \frac{1}{2}$ を代入すると、

$$1 + \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \times \frac{1}{2^2} + \cdots = -\frac{\ln \frac{1}{2}}{\frac{1}{2}} = 2\ln 2.$$

小問 (iii)

次のようにおく。

$$c_k = \frac{1 \times 3 \times \cdots \times (2k-1)}{k!}, \qquad c_0 = 1.$$

考えてみよう 奇数の積を $k!$ で割ったものを、以前どこで見たことがあるだろうか？

それは $(1+y)^{-1/2}$ の二項展開においてである。y^k の係数は

$$\binom{-\frac{1}{2}}{k} = \frac{\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{3}{2}\right)\cdots\left(-\frac{2k-1}{2}\right)}{k!} = \frac{(-1)^k}{2^k} \cdot \frac{1 \times 3 \times \cdots \times (2k-1)}{k!} = \left(-\frac{1}{2}\right)^k c_k.$$

である。したがって $y = -2x$ とすると、符号と 2 のべきが打ち消し合う：

$$(1-2x)^{-1/2} = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{-\frac{1}{2}}{k} (-2x)^k = \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k = 1 + x + \frac{1 \times 3}{2!}x^2 + \frac{1 \times 3 \times 5}{3!}x^3 + \cdots,$$

これは $|2x| < 1$ で成り立つ。

さて、与えられた級数を注意深く見てみよう。その一般項は $c_k \cdot \frac{1}{3^{k-1}} = 3c_k\left(\frac{1}{3}\right)^k$ であり、$k = 2$ から始まっている（初項は $\frac{1\times3}{2!} \times \frac{1}{3}$ である）。よってこれは、上の級数の

$x=\frac{1}{3}$ における値から $k=0$ と $k=1$ の項を除いたものの 3 倍である：

$$\begin{aligned}\sum_{k=2}^{\infty} c_k \frac{1}{3^{k-1}} &= 3\left(\sum_{k=0}^{\infty} c_k \left(\tfrac{1}{3}\right)^k - c_0 - c_1\cdot\tfrac{1}{3}\right)\\ &= 3\left(\left(1-\tfrac{2}{3}\right)^{-1/2} - 1 - \tfrac{1}{3}\right)\\ &= 3\left(\sqrt{3}-\tfrac{4}{3}\right)\\ &= 3\sqrt{3}-4.\end{aligned}$$

ここで $\left(\frac{1}{3}\right)^{-1/2}=\sqrt{3}$ であり、$x=\frac{1}{3}$ は $|2x|<1$ を満たす。

検算

- 小問 (i)：部分和 1, 2, 2.75, 3.25, 3.5625, … は少しずつ 4 に近づき、200 項の和は計算機の精度で 4 に一致する。
- 小問 (ii)：$2\ln 2 \approx 1.3863$ であり、部分和 1, 1.25, 1.3333, 1.3646, … もこれと合致する。
- 小問 (iii)：各項は 0.5, 0.2778, 0.1620, … であり、400 項の和は 1.196152… となって $3\sqrt{3}-4 \approx 1.1962$ と一致する。簡単な妥当性の確認として、答えは正で初項 0.5 より大きくなければならない。また $k=1$ の項を除き忘れた場合も排除できる（その場合は $3\sqrt{3}-3 \approx 2.196$ となるが、各項はおおよそ等比的に小さくなるので、これは大きすぎる）。

よくある間違い

- (ii) で x で割るのを忘れること：$x=\frac{1}{2}$ における $-\ln(1-x)$ は $\ln 2$ となり、答えの半分になってしまう。
- (iii) で級数が $k=2$ から始まることに気づかないこと、あるいは $\frac{1}{3^{k-1}}=3\cdot\frac{1}{3^k}$ から生じる余分な因子 3 を見落とすこと。

STEP のその先へ

べき級数を項別に微分・積分することは、その収束半径（radius of convergence）の内側では正当化される。なぜなら、べき級数はその半径の真に内側にある任意の閉区間上で一様収束（uniform convergence）するからである。これは大学 1 年次の解析学で学ぶ標準的な結果であり、ここで「収束の問題は考えなくてよい」としても差し支え

ないのはこのためである。整数でないべきに対する二項級数は、まさにこの種のべき級数である。Abbott の *Understanding Analysis*（解析学入門書）は、一様収束とべき級数をわかりやすく解説している。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。