解答例

STEP III 1989、第 8 問

純粋数学 ・ 連立微分方程式

> **STEP III 1989、問 8**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/89-s3-q8

鍵となる考え方

第 1 式は y を x と $\mathrm{d}x/\mathrm{d}t$ で表している。そこで第 1 式をもう一度微分すると、現れる $\mathrm{d}y/\mathrm{d}t$ を第 2 式で置き換えることができ、y は完全に消える。残るのは定数係数（constant coefficients）の二階線形微分方程式（second-order linear differential equation）である。その補助方程式（auxiliary equation）は重解（repeated root）をもち、強制項（forcing term）の一つがその根と一致する。この共鳴（resonance）こそが、この問題の本当の試金石である。

解答

y の消去

t についての導関数をドットで表す。$\dot{x} = 4(x - y)$ を微分し、$\dot{y}$ に第 2 式を用いると

$$\ddot{x} = 4\dot{x} - 4\dot{y} = 4\dot{x} - 4x + 48\left(\mathrm{e}^{2t} + \mathrm{e}^{-2t}\right),$$

となる。したがって

$$\boxed{\ddot{x} - 4\dot{x} + 4x = 48\left(\mathrm{e}^{2t} + \mathrm{e}^{-2t}\right),}$$

であり、この式には y が含まれない。

x を求める

余関数 (*complementary function*)。補助方程式 $m^2 - 4m + 4 = (m-2)^2 = 0$ は重解 $m = 2$ をもつので、余関数は

$$x_{\mathrm{c}} = (A + Bt)\,\mathrm{e}^{2t}.$$

である。

特殊解（*particular integral*）。方程式は線形なので、二つの強制項を一つずつ扱えばよい。

$48\mathrm{e}^{-2t}$ に対しては $x = D\mathrm{e}^{-2t}$ とおいてみる。代入すると $D(4+8+4)\mathrm{e}^{-2t} = 48\mathrm{e}^{-2t}$ となるので、$D = 3$ である。

> **考えてみよう** $48\mathrm{e}^{2t}$ の項に対して、$C\mathrm{e}^{2t}$ や、さらには $Ct\,\mathrm{e}^{2t}$ でさえうまくいかないのはなぜか？

e^{2t} も $t\,\mathrm{e}^{2t}$ もすでに余関数に含まれているので、左辺はこれらを 0 に移してしまう。2 は**二重根**であるから、$t^2\mathrm{e}^{2t}$ まで上げなければならない。そこで $x = Ct^2\mathrm{e}^{2t}$ とおいてみる。代入のうまい方法は、$x = u\,\mathrm{e}^{2t}$ と書くことである。すると

$$\dot{x} = (\dot{u} + 2u)\mathrm{e}^{2t}, \qquad \ddot{x} = (\ddot{u} + 4\dot{u} + 4u)\mathrm{e}^{2t},$$

であるから

$$\ddot{x} - 4\dot{x} + 4x = \ddot{u}\,\mathrm{e}^{2t}.$$

となる。$u = Ct^2$ のときこれは $2C\mathrm{e}^{2t}$ なので、$2C = 48$ より $C = 24$ である。（この置き換えは、余関数が $(A + Bt)\mathrm{e}^{2t}$ となる理由も示している。$\ddot{u} = 0$ であればよいのである。）

よって一般解（general solution）は

$$x = (A + Bt)\,\mathrm{e}^{2t} + 24t^2\mathrm{e}^{2t} + 3\mathrm{e}^{-2t}.$$

である。

初期条件（*initial conditions*）。与えられているのは $x(0) = 0$ と $y(0) = 0$ だけである。二階の方程式には $\dot{x}(0)$ が必要であり、それはもとの第 1 式から得られる：$\dot{x}(0) = 4(x(0) - y(0)) = 0$。

$x(0) = 0$ から $A + 3 = 0$、すなわち $A = -3$ である。微分すると

$$\dot{x} = (B + 2A + 2Bt + 48t + 48t^2)\mathrm{e}^{2t} - 6\mathrm{e}^{-2t},$$

となるので、$\dot{x}(0) = B + 2A - 6 = 0$ から $B = 12$ を得る。したがって

$$\boxed{x = \left(24t^2 + 12t - 3\right)\mathrm{e}^{2t} + 3\mathrm{e}^{-2t}.}$$

y を求める

もう一つ微分方程式を解く必要はない。第 1 式から $y = x - \frac{1}{4}\dot{x}$ となるからである。$A = -3$、$B = 12$ のとき

$$\dot{x} = \left(48t^2 + 72t + 6\right)\mathrm{e}^{2t} - 6\mathrm{e}^{-2t},$$

であるから

$$\begin{aligned} y &= \left(24t^2+12t-3\right)\mathrm{e}^{2t} + 3\mathrm{e}^{-2t} - \left(12t^2+18t+\tfrac{3}{2}\right)\mathrm{e}^{2t} + \tfrac{3}{2}\mathrm{e}^{-2t} \\ &= \left(12t^2-6t-\tfrac{9}{2}\right)\mathrm{e}^{2t} + \tfrac{9}{2}\mathrm{e}^{-2t}. \end{aligned}$$

すなわち

$$\boxed{y = \tfrac{3}{2}\left(8t^2-4t-3\right)\mathrm{e}^{2t} + \tfrac{9}{2}\mathrm{e}^{-2t}.}$$

検算

- $t=0$ において：$y(0) = -\frac{9}{2} + \frac{9}{2} = 0$。これは直接課した条件ではないので、本当の意味での検算になっている。
- y を消去するためだけに使った第 2 式も成り立つはずである。微分すると

  $$\dot{y} = \left(24t^2+12t-15\right)\mathrm{e}^{2t} - 9\mathrm{e}^{-2t},$$

  であり、

  $$x - 12\left(\mathrm{e}^{2t}+\mathrm{e}^{-2t}\right) = \left(24t^2+12t-15\right)\mathrm{e}^{2t} - 9\mathrm{e}^{-2t}.$$

  である。両者は一致する。
- 数値的には、もとの連立方程式をルンゲ＝クッタ法（Runge–Kutta method）で $(0,0)$ から順に進めると、$x(1) \approx 244.2449$、$y(1) \approx 11.6926$ が得られる。公式からは $33\mathrm{e}^2 + 3\mathrm{e}^{-2}$ と $\frac{3}{2}\mathrm{e}^2 + \frac{9}{2}\mathrm{e}^{-2}$ が得られ、これらは同じ値をもつ。

よくある間違い

- 共鳴する項に対して $Ct\,\mathrm{e}^{2t}$ を試してしまう。根 2 は重解なので、$t^2\mathrm{e}^{2t}$ が必要である。
- 二つ目の初期条件がどこから来るのかに気づかない。$\dot{x}(0) = 0$ という値は、第 1 式と $x(0) = y(0)$ に隠れている。
- y について別の二階方程式を解いてしまう。そうすると新たに二つの定数が入り込み、それらを x と整合させなければならなくなる。$y = x - \frac{1}{4}\dot{x}$ を用いればこれを避けられる。

STEP のその先へ

y を消去するのは、線形連立方程式を解く方法の一つである。大学での扱い方では、これを $M = \begin{pmatrix} 4 & -4 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ として $\dot{\mathbf{v}} = M\mathbf{v} + \mathbf{f}(t)$ と書く。ここで M は重複する固有値

（eigenvalue）2 をもつが、固有ベクトル（eigenvector）は一つしかないので対角化（diagonalise）できない。そしてまさにそこから $t\,\mathrm{e}^{2t}$ の項が生じるのである。ジョルダン標準形（Jordan normal form）と行列指数関数（matrix exponential）e^{Mt} によって、このことは厳密に定式化される。Boyce and DiPrima, *Elementary Differential Equations*（常微分方程式の入門書）は、固有値が重複する場合も含めて線形連立方程式を扱っている。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。