解答例

STEP III 1989、第 7 問

純粋数学 ・ せん断行列

> **STEP III 1989、問 7**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/89-s3-q7

鍵となる考え方

すべては 2 つの単位ベクトル（unit vector）を用いると最も簡単になる。直線 $L\colon y = x\tan\alpha$ の向きの $\mathbf{u}$ と、それに垂直な $\mathbf{n}$ である。このせん断（shear）は各点を $\mathbf{u}$ に平行に、L からの符号付き距離に比例する量だけ動かすので、$\mathbf{M} = \mathbf{I} + k\,\mathbf{u}\mathbf{n}^{\mathsf{T}}$ となる。後半については、ある行列が $\mathbf{I} + k\mathbf{A}$ と可換（commute）であることと、$\mathbf{A}$ と可換であることは同値であり、これによって煩雑な部分が取り除かれる。

解答

$s = \sin\alpha$、$c = \cos\alpha$ とおく。α は鋭角なので、$s > 0$ かつ $c > 0$ である。

$$\mathbf{u} = \begin{pmatrix} c \\ s \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{n} = \begin{pmatrix} -s \\ c \end{pmatrix},$$

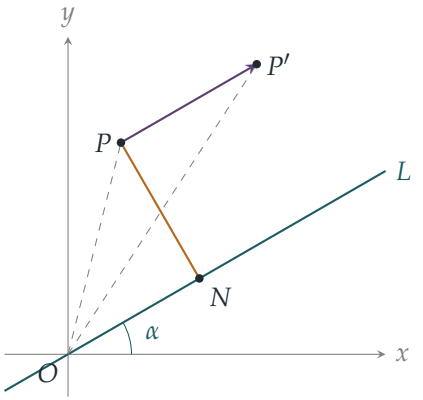
とおくと、$\mathbf{u}$ は x 軸と角 α をなす L 方向の単位ベクトルであり、$\mathbf{n}$ は L の左上側を向く単位法線ベクトル（unit normal）である。

M を求める

$P = (x, y)$ に対して

$$d = \mathbf{n} \cdot \overrightarrow{OP} = y\cos\alpha - x\sin\alpha,$$

とおく。これは P から L までの**符号付き**距離（signed distance）である。このとき $PN = |d|$ であり、$d > 0$ となるのは P が L の上側にあるときに限る。



P を L の上側にとり、$d > 0$ とする。(i) より $\overrightarrow{PP'}$ は $\mathbf{u}$ の向きを向くので、$\lambda > 0$ として $\overrightarrow{PP'} = \lambda\mathbf{u}$ と書ける。条件 (ii) はこれと矛盾しない。2 次元の外積（cross product）は

$$\overrightarrow{OP} \times \overrightarrow{OP'} = \overrightarrow{OP} \times (\overrightarrow{OP} + \lambda\mathbf{u}) = \lambda\,(xs - yc) = -\lambda d < 0,$$

であるから、OP から OP' への回転は時計回りであり、要求どおりである。条件 (iii) より $\lambda = k\,PN = kd$ である（これらの条件が同時に成り立つには $k > 0$ が必要である）。したがって、L の上側にあるすべての P に対して

$$\overrightarrow{OP'} = \overrightarrow{OP} + kd\,\mathbf{u} = \overrightarrow{OP} + k\,\mathbf{u}\,(\mathbf{n} \cdot \overrightarrow{OP}).$$

が成り立つ。

考えてみよう ここまでは L の上側の点しか使っていない。それなのに、なぜ $\mathbf{M}$ が完全に決まるのだろうか。

T は線形（linear）であり、写像 $\mathbf{v} \mapsto \mathbf{v} + k\,\mathbf{u}(\mathbf{n} \cdot \mathbf{v})$ も線形である。両者は L の上側の開半平面（open half-plane）上で一致し、この半平面は一次独立（linearly independent）な 2 つのベクトル（たとえば $\mathbf{n}$ と $\mathbf{n} + \mathbf{u}$）を含む。基底（basis）上で一致する 2 つの線形写像は等しい。よって**すべての**ベクトルに対して

$$\mathbf{M} = \mathbf{I} + k\,\mathbf{u}\mathbf{n}^{\mathsf{T}} = \mathbf{I} + k \begin{pmatrix} c \\ s \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -s & c \end{pmatrix} = \mathbf{I} + k \begin{pmatrix} -sc & c^2 \\ -s^2 & sc \end{pmatrix}.$$

である。すなわち

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} 1 - k\sin\alpha\cos\alpha & k\cos^2\alpha \\ -k\sin^2\alpha & 1 + k\sin\alpha\cos\alpha \end{pmatrix},$$

となり、示すべき式が得られた。確認として、$\mathbf{n} \cdot \mathbf{u} = 0$ より $\mathbf{M}\mathbf{u} = \mathbf{u}$ であるから、L 上の各点は動かない。また $\det\mathbf{M} = 1 - k^2s^2c^2 + k^2s^2c^2 = 1$ であり、せん断として当然あるべき値になっている。

可換であるための条件

$\mathbf{A} = \mathbf{u}\mathbf{n}^{\mathsf{T}} = \begin{pmatrix} -sc & c^2 \\ -s^2 & sc \end{pmatrix}$、$\mathbf{X} = \begin{pmatrix} p & q \\ r & t \end{pmatrix}$ とおく。$\mathbf{M} = \mathbf{I} + k\mathbf{A}$ であり、$\mathbf{I}$ はあらゆる行列と可換であるから

$$\mathbf{X}\mathbf{M} - \mathbf{M}\mathbf{X} = k(\mathbf{X}\mathbf{A} - \mathbf{A}\mathbf{X}).$$

となる。$k \neq 0$ なので、$\mathbf{X}$ が $\mathbf{M}$ と可換であることは、$\mathbf{A}$ と可換であることと同値である。積を計算すると

$$\mathbf{X}\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -psc - qs^2 & pc^2 + qsc \\ -rsc - ts^2 & rc^2 + tsc \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{A}\mathbf{X} = \begin{pmatrix} -psc + rc^2 & -qsc + tc^2 \\ -ps^2 + rsc & -qs^2 + tsc \end{pmatrix},$$

であるから

$$\mathbf{X}\mathbf{A} - \mathbf{A}\mathbf{X} = \begin{pmatrix} -(qs^2 + rc^2) & -c^2(t-p) + 2qsc \\ -s^2(t-p) - 2rsc & qs^2 + rc^2 \end{pmatrix}.$$

となる。これが零行列になるのは、次が成り立つとき、かつそのときに限る。

$$\begin{aligned} &\text{(a)} \quad qs^2 + rc^2 = 0, \\ &\text{(b)} \quad c^2(t-p) = 2qsc, \\ &\text{(c)} \quad s^2(t-p) = -2rsc. \end{aligned}$$

$c \neq 0$ なので、(b) は $t - p = 2q\tan\alpha$ と同値である。$s \neq 0$ なので、(c) は $t - p = -2r\cot\alpha$ と同値である。

> **考えてみよう** 式は 3 つあるのに、示すべき条件には 2 つしか含まれていない。(a) はどこへ行ったのだろうか。

(a) は残りの 2 式から導かれる。$2q\tan\alpha = -2r\cot\alpha$ ならば、両辺に $\frac{1}{2}sc$ を掛けて $qs^2 = -rc^2$ となり、これは (a) である。よって

$$\mathbf{X}\mathbf{M} = \mathbf{M}\mathbf{X} \iff t - p = 2q\tan\alpha = -2r\cot\alpha.$$

が成り立つ。上の各段階はすべて同値変形なので、両方向が成り立つ。これが求める必要十分条件（necessary and sufficient condition）である。

検算

▶ $\alpha = \frac{\pi}{4}$、$k = 2$ とすると $\mathbf{M} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ となる。$y = x$ の上側に距離 $\frac{1}{\sqrt{2}}$ だけ離れた点 $(0,1)$ は $(1,2)$ に移る。これは 45° の方向への $\sqrt{2} = 2 \times \frac{1}{\sqrt{2}}$ の移動であり、回転は時計回りである。

- $\mathbf{X} = \mathbf{M}$ 自身はこの条件を満たす。実際、$t - p = 2ksc$、$2q\tan\alpha = 2kc^2 \cdot \frac{s}{c} = 2ksc$、$-2r\cot\alpha = 2ks^2 \cdot \frac{c}{s} = 2ksc$ である。$\mathbf{I}$ も 3 つの式がすべて 0 となり、条件を満たす。
- 数値的に、ランダムな α、k と L の上側のランダムな P に対して、$\mathbf{M}$ が (i)–(iii) を再現することを確かめた。条件を満たすランダムな行列は誤差 10^{-8} 以内で $\mathbf{M}$ と可換であり、条件を満たさないランダムな行列は可換でなかった。

よくある間違い

- すべての点について符号なしの距離 PN を使ってしまう。変位は**符号付き**距離の k 倍である。L の下側の点は逆向きに動き、そのおかげで T は線形になる。
- 可換であるための条件について、一方の向き（「条件を満たせば可換」または「可換ならば条件を満たす」）だけを証明してしまう。あるいは、(1,1) 成分から新しい条件が出てこないことを示し忘れる。

STEP のその先へ

ここで $\mathbf{M}$ と可換な行列は、ちょうど $a\mathbf{I} + b\mathbf{A}$ の形の行列である。$t - p = 2q\tan\alpha = -2r\cot\alpha$ が 2 パラメータの族であることを確かめてみよ。これは一般的な事実の一例である。$\mathbf{I}$ の定数倍でない 2×2 行列について、それと可換な行列はちょうど $a\mathbf{I} + b\mathbf{M}$ の形の行列である。$n \times n$ 行列については、最小多項式（minimal polynomial）が固有多項式（characteristic polynomial）と一致するとき、類似の事実（可換な行列は $\mathbf{M}$ の多項式である）が成り立つ。ストラング（Strang）の *Introduction to Linear Algebra*（線形代数入門）では、階数 1 の行列（rank-one matrix）$\mathbf{u}\mathbf{n}^{\mathsf{T}}$ と、この背後にある考え方が展開されている。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。