解答例

STEP III 1989、第 6 問

純粋数学 • 2 次曲線の極方程式

STEP III 1989、問 6

先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：

step.maths.org/questions/89-s3-q6

鍵となる考え方

極座標（polar coordinates）では、原点を通らない直線は $1/r$ が $\cos\theta$ と $\sin\theta$ の一次結合で表される。これを $A\cos\theta + B\cos(\theta-\gamma)$ の形に書けば、円錐曲線（conic）自身の $\cos\theta$ の項とぴったり一致させることができる。$e\cos\theta$ の部分が一致すれば、弦（chord）の方程式で調整すべきものは余弦一つだけになり、残りは $\theta = \gamma$ に関する対称性（symmetry）が片づけてくれる。弦を一点に縮めれば接線（tangent）が得られ、接線の方程式から二等分の性質はほとんど自動的に従う。

解答

以下を通して、(r,θ) は $x = r\cos\theta, y = r\sin\theta$ を満たす極座標とし、$r < 0$ も許す（点 (r,θ) は $(-r,\theta+\pi)$ と同じ点である）。円錐曲線の焦点（focus）S は原点にあるものとする。

直線の極方程式

$lx + my = 1$ は原点を通り得ないので、この直線上では $r \neq 0$ であり、r で割ると

$$\frac{1}{r} = l\cos\theta + m\sin\theta.$$

を得る。提示された形を展開すると

$$A\cos\theta + B\cos(\theta-\gamma) = (A + B\cos\gamma)\cos\theta + B\sin\gamma\,\sin\theta.$$

となる。$B\sin\gamma = m$ かつ $A + B\cos\gamma = l$ ならば、これらはすべての θ で一致する。$\sin\gamma \neq 0$ なので

$$B = \frac{m}{\sin\gamma}, \qquad A = l - m\cot\gamma,$$

ととることができ、これが求める極方程式である。逆に、A, B が両方の係数を同時に 0 にしないような方程式 $1/r = A\cos\theta + B\cos(\theta - \gamma)$ は、$l = A + B\cos\gamma, m = B\sin\gamma$ とした直線 $lx + my = 1$ である。また、この形は $(r,\theta) \to (-r,\theta + \pi)$ で変わらないので、r の符号をどちらで用いても直線全体を表すことに注意する。

弦 PQ

弦を $a/r = A\cos\theta + B\cos(\theta - \gamma)$ の形で探す。P と Q では $\theta = \gamma \mp \delta$ かつ $a/r = 1 + e\cos\theta$ であるから、

$$A\cos(\gamma \mp \delta) + B\cos(\mp\delta) = 1 + e\cos(\gamma \mp \delta).$$

が成り立てばよい。どちらの点についても $\cos(\mp\delta) = \cos\delta$ なので、$A = e, B\cos\delta = 1$ と選べば二つの式が同時に満たされ、$\cos\delta \neq 0$ より B について解ける。異なる二点は直線を一つに定めるので、弦 PQ は

$$\boxed{\frac{a}{r} = e\cos\theta + \sec\delta\,\cos(\theta - \gamma).}$$

である。($\cos\delta = 0$ ならば P と Q は $\theta = \gamma \mp \frac{\pi}{2}$ にあり、PQ は焦点弦（focal chord）である。原点を通る直線は $1/r = \ldots$ の形の方程式をもたないので、この場合は除外されている。)

考えてみよう 弦が円錐曲線と P と Q でのみ交わることは、どうしてわかるのだろうか？

各 θ に対して、円錐曲線上の点は $a/r = 1 + e\cos\theta$ を満たすただ一つである。弦がその点を通るのは $1 + e\cos\theta = e\cos\theta + \sec\delta\cos(\theta - \gamma)$、すなわち $\cos(\theta - \gamma) = \cos\delta$ のときであり、したがって $\theta = \gamma \pm \delta$ のときに限る。$e\cos\theta$ の項が打ち消し合うこと、これこそが $A = e$ と選んだ理由のすべてである。

$\theta = \gamma$ における接線

$\theta = \gamma$ となる点 G における接線は、P と Q が G に近づくとき、すなわち $\delta \to 0$ のときの弦 PQ の極限である。弦の方程式は δ に連続的に依存し、$\sec\delta \to 1$ であるから、接線は

$$\boxed{\frac{a}{r} = e\cos\theta + \cos(\theta - \gamma).}$$

である。確認として、これが円錐曲線と交わるのは $\cos(\theta-\gamma)=1$ のとき、すなわち G のみであり、接線としてあるべき姿になっている。より決定的には、直交座標で接線は $(e+\cos\gamma)x+(\sin\gamma)y=a$ であり、法線ベクトル（normal vector）は $(e+\cos\gamma,\,\sin\gamma)$ である。円錐曲線は $r=a-ex$ であり、曲線に沿って微分すると $(x\,\mathrm{d}x+y\,\mathrm{d}y)/r=-e\,\mathrm{d}x$、すなわち $(e+x/r)\,\mathrm{d}x+(y/r)\,\mathrm{d}y=0$ を得る。G では $x/r=\cos\gamma, y/r=\sin\gamma$ なので、そこでの曲線の法線は同じベクトルである。

最後の小問

焦点 S を原点におくと、円錐曲線は $a/r=1+e\cos\theta$ となる。L と M を $\theta=\alpha$ と $\theta=\beta$ の点とし、

$$\gamma=\tfrac{1}{2}(\alpha+\beta),\qquad \delta=\tfrac{1}{2}(\beta-\alpha),$$

とおくと、L と M は $\theta=\gamma-\delta$ と $\gamma+\delta$ にあり、上の P と Q とまったく同じ状況になる。前の結果から、L と M における接線は

$$\frac{a}{r}=e\cos\theta+\cos(\theta-\alpha),\qquad \frac{a}{r}=e\cos\theta+\cos(\theta-\beta).$$

である。T では両方が成り立つので $\cos(\theta-\alpha)=\cos(\theta-\beta)$ である。よって $\theta-\alpha=\theta-\beta+2k\pi$（これは $L=M$ を意味する）であるか、または

$$\theta-\alpha=-(\theta-\beta)+2k\pi\quad\Longrightarrow\quad\theta=\tfrac{1}{2}(\alpha+\beta)+k\pi=\gamma+k\pi.$$

である。したがって T は S を通り $\theta=\gamma$ の方向をもつ直線上にあり、

$$r_T=\frac{a}{e\cos\gamma+\cos\delta}$$

である（$e\cos\gamma+\cos\delta=0$ のときに限り、二本の接線は平行で T は存在しない）。

半直線 SL と SM は方向 $\alpha=\gamma-\delta$ と $\beta=\gamma+\delta$ を向いている（楕円（ellipse）や放物線（parabola）の場合のように、L と M で $r>0$ となる通常の場合を考える）。直線 $\theta=\gamma$ はそれぞれと角 δ をなすので、直線 ST は角 LSM を二等分する。（$r_T<0$ ならば T は反対側の半直線上にあり、ST は優角（reflex angle）LSM を二等分する。この場合も角 LST と MST は等しい。）

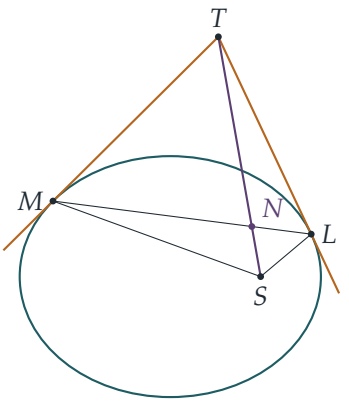
ST と LM の交点を求めるため、その点を N とよぶ。弦 LM は $a/r=e\cos\theta+\sec\delta\cos(\theta-\gamma)$ であり、ST 上では $\theta=\gamma$ であるから

$$\frac{a}{SN}=e\cos\gamma+\sec\delta\quad\Longrightarrow\quad SN=\frac{a\cos\delta}{1+e\cos\gamma\cos\delta}.$$

$2\cos\gamma\cos\delta=\cos(\gamma-\delta)+\cos(\gamma+\delta)=\cos\alpha+\cos\beta$ を用いると、これは

$$\boxed{N\text{ の位置は}\theta=\tfrac{1}{2}(\alpha+\beta),\quad r=\frac{2a\cos\frac{1}{2}(\beta-\alpha)}{2+e\cos\alpha+e\cos\beta}.}$$

となる。LM が焦点弦（$\cos\delta = 0$）のとき、これは当然そうあるべきように $N = S$ を与える。



検算

- 円（$e = 0$、半径 a）で試してみる。接線は $a/r = \cos(\theta - \gamma)$、すなわち $x\cos\gamma + y\sin\gamma = a$ となり、$x^2 + y^2 = a^2$ のおなじみの接線である。
- 三角形 LSM における角の二等分線定理（angle bisector theorem）によれば $LN : NM = SL : SM$ である。$a = 1.5, e = 0.6, \alpha = 40°, \beta = 160°$（図の場合）とすると $SN \approx 0.791$ であり、比は数値的に確かに成り立つ。
- 弦と接線の方程式、ST の方向、角の相等、SN の公式は、無作為に選んだ何千もの円錐曲線と点についてコンピュータで検証した。

よくある間違い

- $\cos(\theta - \alpha) = \cos(\theta - \beta)$ を $+$ の符号だけで解いてしまう。その場合からは何も得られず（$\alpha = \beta$ が必要になる）、有用な解は $-$ の符号の方である。
- A の自由度を使わない。$A = e$ とすることで、円錐曲線との交点を求めるときに $e\cos\theta$ の項が打ち消し合うのである。

STEP のその先へ

ST が $\angle LSM$ を二等分するという結果は円錐曲線の古典的な焦点の性質であり、直線 LM は円錐曲線に関する T の**極線**（polar）である。極と極線の双対性（pole–polar duality）は射影幾何学（projective geometry）への入り口であり、そこではすべての

非退化な円錐曲線が同値となり、接することや点が線上にあることは純粋に代数的な概念になる。Brannan, Esplen, Gray の *Geometry*（幾何学）は、円錐曲線と射影幾何学についての大学一年生向けのよい解説書である。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。