解答例

STEP III 1989、第 5 問

純粋数学 ・ チェビシェフ多項式

> **STEP III 1989、問 5**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/89-s3-q5

鍵となる考え方

$x = \cosh\theta$ とおく。すると $e^{\pm\theta}$ はちょうど $x \pm \sqrt{x^2-1}$ であり、$y = \cosh n\theta$ はそれらの n 乗の平均である。これらのべきを二項定理（binomial theorem）で展開すると、$\sqrt{x^2-1}$ の奇数乗は打ち消し合うので、残るのは x の多項式（polynomial）である。その多項式を整った形に書ければ、各係数は二項係数（binomial coefficient）の短い和にすぎない。

解答

閉じた形

$\theta = \cosh^{-1} x$ とおくと、$\theta \geq 0$ かつ $x = \cosh\theta$ である。このとき $\sinh\theta \geq 0$ かつ $\sinh^2\theta = x^2 - 1$ であるから、$\sinh\theta = \sqrt{x^2-1}$ である。したがって

$$e^{\theta} = \cosh\theta + \sinh\theta = x + \sqrt{x^2-1}, \qquad e^{-\theta} = \cosh\theta - \sinh\theta = x - \sqrt{x^2-1}.$$

ゆえに

$$y = \cosh n\theta = \frac{e^{n\theta} + e^{-n\theta}}{2} = \frac{(x+\sqrt{x^2-1})^n + (x-\sqrt{x^2-1})^n}{2},$$

となり、示すべき式が得られた。

y が奇多項式である理由

$s = \sqrt{x^2-1}$ とおく。二項定理より

$$(x+s)^n + (x-s)^n = \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} x^{n-j} s^j (1 + (-1)^j) = 2 \sum_{j \text{ が偶数}} \binom{n}{j} x^{n-j} s^j.$$

s の奇数乗は打ち消し合い、偶数乗 $s^{2m} = (x^2-1)^m$ はどれも x の多項式である。よって

$$y = \sum_{m=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} \binom{n}{2m} x^{n-2m}(x^2-1)^m.$$

ここで $n = 2k+1$ とすると、m は 0 から k までを動く。各項は奇数乗 $x^{2k+1-2m}$ と x^2 の多項式との積であるから、x の奇数乗のみを含み、最高次は x^{2k+1} である。したがって $y = a_0x + a_1x^3 + \cdots + a_kx^{2k+1}$ である。

係数を読み取るため、$j = k-m$（したがって $j = 0,\ldots,k$）とおき、$\binom{2k+1}{2k-2j} = \binom{2k+1}{2j+1}$ を用いると

$$y = \sum_{j=0}^{k} \binom{2k+1}{2j+1} x^{2j+1}(x^2-1)^{k-j}.$$

添字 j の項は x^{2j+1} から始まる。よって x^{2r+1} は $j \le r$ の項からのみ現れ、そのうち第 j 項からは $(x^2-1)^{k-j}$ の $(x^2)^{r-j}$ の項、すなわち $\binom{k-j}{r-j}(-1)^{k-r}$ が必要である。したがって

$$a_r = (-1)^{k-r} \sum_{j=0}^{r} \binom{2k+1}{2j+1}\binom{k-j}{r-j}. \qquad (*)$$

a_0

$r = 0$ のとき、寄与するのは $j = 0$ のみである：

$$a_0 = (-1)^k \binom{2k+1}{1} = (-1)^k(2k+1).$$

小問 (i)

$r = 1$ のとき、$j = 0, 1$ が寄与する：

$$\begin{aligned} a_1 &= (-1)^{k-1}\left[(2k+1)\binom{k}{1} + \binom{2k+1}{3}\right] = (-1)^{k-1}(2k+1)\left[k + \frac{2k(2k-1)}{6}\right] \\ &= (-1)^{k-1}(2k+1)\,k\,\frac{3+2k-1}{3} = (-1)^{k-1}\,\frac{2k(k+1)(2k+1)}{3}, \end{aligned}$$

となり、示すべき式が得られた。

小問 (ii)

ここでは x^5 が現れるために $k \ge 2$ が必要である。$r = 2$ のとき、$j = 0, 1, 2$ が寄与する：

$$a_2 = (-1)^k\left[(2k+1)\binom{k}{2} + \binom{2k+1}{3}\binom{k-1}{1} + \binom{2k+1}{5}\right].$$

各項は因数 $(2k+1)k(k-1)$ をもつので、これをくくり出すと

$$\begin{aligned} a_2 &= (-1)^k(2k+1)k(k-1)\left[\frac{1}{2}+\frac{2k-1}{3}+\frac{(2k-1)(2k-3)}{30}\right] \\ &= (-1)^k(2k+1)k(k-1)\,\frac{15+(20k-10)+(4k^2-8k+3)}{30} \\ &= (-1)^k(2k+1)k(k-1)\,\frac{4(k+1)(k+2)}{30} = (-1)^k\,\frac{2(k-1)k(k+1)(k+2)(2k+1)}{15}. \end{aligned}$$

第 3 項については $\binom{2k+1}{5} = \frac{(2k+1)(2k)(2k-1)(2k-2)(2k-3)}{120} = \frac{(2k+1)k(k-1)(2k-1)(2k-3)}{30}$ を用いた。

考えてみよう 我々の答えには、(ii) に印刷された式にはない因数 $(k+1)$ がある。どちらが正しいのだろうか？

$k=2$ で確かめる。このとき $x=\cosh\theta$ として $y=\cosh(5\theta)$ であり、$\cosh 5\theta = 16x^5-20x^3+5x$ であるから $a_2=16$ である。我々の式は $2\cdot1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5/15=16$ を与える。印刷された式は $2\cdot1\cdot2\cdot4\cdot5/15=\frac{16}{3}$ を与えるが、a_r は整数なのでこれは正しくありえない。つまり問題文には誤植があり、因数 $(k+1)$ が抜けている。正しい結果は上に示したものである。

係数の和

多項式に $x=1$ を代入する。恒等式は $x\geq 1$ で成り立ち、$x=1$ も許されるので

$$\sum_{r=0}^{k} a_r = y(1) = \cosh(n\cosh^{-1}1) = \cosh 0 = 1.$$

検算

- $k=1$：$\cosh 3\theta = 4x^3-3x$。公式から $a_0=-3$、$a_1=2\cdot1\cdot2\cdot3/3=4$ となり、$-3+4=1$ である。
- $k=3$：$\cosh 7\theta = 64x^7-112x^5+56x^3-7x$。公式から $a_0=-7$、$a_1=56$、$a_2=-2\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5\cdot7/15=-112$ となり、係数の和は 1 である。
- $(*)$ は、$k\leq 14$ のすべてについて漸化式（recurrence relation）$T_{m+1}=2xT_m-T_{m-1}$ とコンピュータで照合し、さらに無作為に選んだ $x\geq 1$ で多項式を $\cosh(n\cosh^{-1}x)$ と比較して確かめた。

よくある間違い

- x^{2r+1} には展開の 1 つの項だけでなく、いくつもの項から寄与があることを忘れる。

- 符号の誤り：a_r への寄与はどれも同じ符号 $(-1)^{k-r}$ をもつので、まずそれをくくり出すこと。
- (ii) の印刷された形に無理やり式変形を合わせようとする。$k = 2$ のような小さな場合を試せば、誤植であることがわかる。

STEP のその先へ

多項式 y はチェビシェフ（Chebyshev）多項式 $T_n(x)$ であり、通常は $T_n(\cos\phi) = \cos n\phi$ によって定義される。我々の双曲線関数版は $x \geq 1$ における同じ恒等式であり、多項式は任意の区間上の値で決まるので、両者は一致する。チェビシェフ多項式は近似理論（approximation theory）の中心的な存在である。n 次のモニック多項式（monic polynomial）の中で、$[-1, 1]$ 上の最大値（絶対値）が最も小さいのが $2^{1-n}T_n$ だからである。数値解析（numerical analysis）の入門講義でも必ず再び登場する。この種の式変形について STEP 形式の演習をさらに積みたければ、Siklos の *Advanced Problems in Mathematics*（数学の発展問題集）に取り組むとよい。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。