解答例

STEP III 1989、第 4 問

純粋数学 • 曲線の概形と解

> **STEP III 1989、問 4**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/89-s3-q4

鍵となる考え方

分数式を多項式と真分数式（proper fraction）の和に分けると、斜漸近線（oblique asymptote）がただちに得られ、導関数（derivative）の計算も容易になる。導関数は至るところで 2 より大きいことがわかるので、3 本の枝（branch）はいずれも $-\infty$ から $+\infty$ まで上昇する。後半の各方程式は、実は「曲線 = より単純な曲線」という形を変装させたものである。そのうえで、各枝における差の狭義単調性（strict monotonicity）によって交点の個数を正確に数えることができる。

解答

曲線

$2x(x^2-5) = 2x(x^2-4) - 2x$ であるから、

$$y = 2x - \frac{2x}{x^2-4}.$$

この関数は奇関数（odd function）なので、曲線は原点のまわりに位数 2 の回転対称性（rotational symmetry）をもつ。曲線が座標軸と交わるのは $x(x^2-5) = 0$ となるところ、すなわち $x = 0$ と $x = \pm\sqrt{5}$ のみである。

漸近線。分母は $x = \pm 2$ で 0 となり（そこでの分子は $\mp 4 \neq 0$）、したがって $x = 2$ と $x = -2$ は垂直漸近線（vertical asymptote）である。$|x| \to \infty$ のとき $\frac{2x}{x^2-4} \to 0$ であるから、$y = 2x$ は斜漸近線である。また $y - 2x = -\frac{2x}{x^2-4}$ は、正で大きな x に対しては負、負で絶対値の大きな x に対しては正である。よって曲線は、右側では下から、左側では上から $y = 2x$ に近づく。

傾き。分解した形を微分すると、

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = 2 - \frac{2(x^2-4) - 2x\cdot 2x}{(x^2-4)^2} = 2 + \frac{2(x^2+4)}{(x^2-4)^2} > 2.$$

したがって停留点（stationary point）は存在せず、y は区間 $x < -2$、$-2 < x < 2$、$x > 2$ のそれぞれで狭義単調増加（strictly increasing）である。さらに微分すると $\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2} = -\dfrac{4x(x^2+12)}{(x^2-4)^3}$ となるので、変曲点（point of inflection）は原点のみである。

原点における接線。$x = 0$ における傾きは $2 + \frac{2\cdot 4}{16} = \frac{5}{2}$ であるから、そこでの接線（tangent）は

$$y = \tfrac{5}{2}x.$$

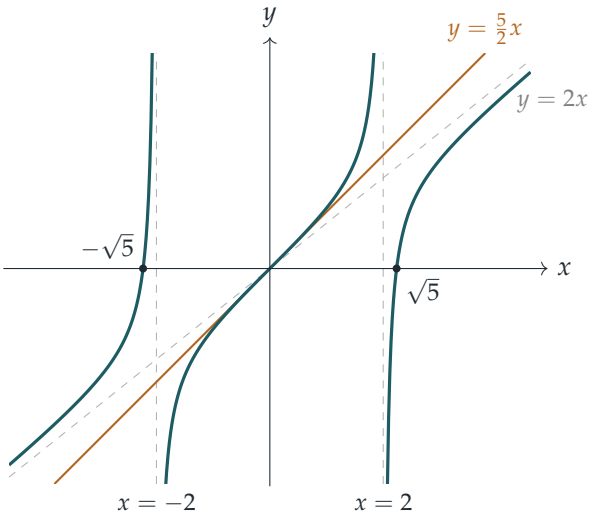
$x = \pm 2$ の近くでの振る舞い。$x = 2$ の近くでは項 $-\frac{2x}{x^2-4}$ が支配的である。この項は $x \to 2^+$ のとき $-\infty$ に、$x \to 2^-$ のとき $+\infty$ に発散し、対称性により $x \to -2^-$ のとき $+\infty$ に、$x \to -2^+$ のとき $-\infty$ に発散する。したがって、

- $x < -2$ では、y は $-\infty$ から $+\infty$ まで上昇し、$-\sqrt{5}$ で軸と交わる。
- $-2 < x < 2$ では、y は原点を通って $-\infty$ から $+\infty$ まで上昇する。
- $x > 2$ では、y は $-\infty$ から $+\infty$ まで上昇し、$\sqrt{5}$ で軸と交わる。

もう一つ、役に立つ事実がある。$0 < x < 2$ に対して

$$y - \tfrac{5}{2}x = \frac{x\left[4(x^2-5) - 5(x^2-4)\right]}{2(x^2-4)} = \frac{-x^3}{2(x^2-4)} > 0,$$

であるから、この範囲で曲線は原点における接線より上にある（対称性により、$-2 < x < 0$ では下にある）。



小問 (i)

$x = 0$（左辺 0、右辺 8）も $x = \pm 2$（左辺 -16、右辺 0）も解ではない。よって $2x(x^2-4)$ で割ってよく、方程式は

$$\frac{2x(x^2-5)}{x^2-4} = \frac{5x-2}{2x} = \frac{5}{2} - \frac{1}{x}.$$

となる。したがって解は、曲線と双曲線（hyperbola）$H\colon y = \frac{5}{2} - \frac{1}{x}$ との交点の x 座標である。枝ごとに調べる。

- $x < -2$：ここで H の傾きは $\frac{1}{x^2} < \frac{1}{4}$ であり、一方で曲線の傾きは > 2 である。よって差（曲線 $-$ H）は狭義単調増加である。H は $\frac{5}{2}$ と 3 の間にとどまるので、この差は $x \to -\infty$ のとき $-\infty$ に、$x \to -2^-$ のとき $+\infty$ に発散する。解はちょうど 1 個である。
- $-2 < x < 0$：曲線では $y < 0$ である（3 つの因数 x、x^2-5、x^2-4 がすべて負）が、H では $y > \frac{5}{2}$ である。解はない。
- $0 < x < 2$：前述の事実より $y > \frac{5}{2}x$ である。また

  $$\tfrac{5}{2}x - \left(\tfrac{5}{2} - \tfrac{1}{x}\right) = \frac{5x^2-5x+2}{2x} > 0,$$

  である。$5x^2-5x+2$ の判別式（discriminant）は $25-40 < 0$ だからである。よって曲線は H より真に上にある。解はない。
- $x > 2$：第 1 の場合と同様に、差は狭義単調増加である（傾きは $> 2 - \frac{1}{4}$）。H は 2 と $\frac{5}{2}$ の間にとどまるので、差は $-\infty$ から $+\infty$ まで変化する。解はちょうど 1 個である。

したがって方程式 (i) はちょうど **2 個**の実数解をもち、一つは -2 より小さく、もう一つは 2 より大きい。

> **考えてみよう** (ii) の方程式は両辺に平方があるが、どうすれば曲線から読み取れるだろうか。

$(x^2-4)^2$ で割る。左辺は y^2 となるので、方程式は $y^2 = x^2+1$ を意味する。

小問 (ii)

ここでも $x = \pm 2$ は解ではない（左辺 16、右辺 0）。よって方程式は $y^2 = x^2+1$ であり、y は曲線の縦座標である。解は、曲線と直角双曲線（rectangular hyperbola）$y^2 - x^2 = 1$ の 2 本の枝 $y = \pm\sqrt{x^2+1}$ との交点である。

上の枝。 $f(x) = y - \sqrt{x^2+1}$ とおく。すると

$$f'(x) = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} - \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} > 2 - 1 > 0,$$

であるから、f は 3 つの区間のそれぞれで狭義単調増加である。各区間で y は $-\infty$ から $+\infty$ まで変化するが、$\sqrt{x^2+1}$ は有限にとどまる（$x \to +\infty$ のとき、$2x$ に対して $|x|$ 程度にしか増加しない。また $x \to -\infty$ のときは f の 2 つの項がともに負である）。よって f は $-\infty$ から $+\infty$ まで変化し、各区間にちょうど 1 個の解がある。合わせて 3 個である。

下の枝。 写像 $(x,y) \mapsto (-x,-y)$ は曲線を自分自身に移し、下の枝を上の枝に移す。よって下の枝との交点もちょうど 3 個である。

2 組の解は重ならない。共通の x において曲線の y はただ一つであり、それが正かつ負であることはありえないからである。したがって方程式 (ii) はちょうど **6 個**の実数解をもつ。（検算として、これは次数 6 の多項式方程式、すなわち $3x^6 - 33x^4 + 92x^2 - 16 = 0$ であるから、その解はすべて実数である。）

> **考えてみよう** (iii) の変数は x ではなく z であり、z は負かもしれない。どうすれば曲線を持ち込めるだろうか。

$z > 0$ に対しては、$x > 0$ として $z = x^2$ とおく。$z \le 0$ の場合は別に直接扱う。

小問 (iii)

左辺は決して負にならないので、解は $z + 1 \ge 0$、すなわち $z \ge -1$ を満たさなければならない。また $z = 0$ は解ではなく（左辺 0、右辺 16）、$z = 4$ も解ではない（左辺 64、右辺 0）。

$z > 0$ である解。 $x > 0$ として $z = x^2$ とおくと、各正の解 z はちょうど 1 個の $x > 0$ に対応する。方程式は $4x^4(x^2-5)^2 = (x^2-4)^2(x^2+1)$ となる。$x^2(x^2-4)^2$ で割ると

$$y^2 = 1 + \frac{1}{x^2}, \qquad \text{すなわち} \qquad y = \pm s(x), \quad s(x) = \sqrt{1 + x^{-2}}.$$

ここで s は $+\infty$（$x \to 0^+$ のとき）から 1（$x \to \infty$ のとき）まで減少し、$s'(x) = -\dfrac{1}{x^3\sqrt{1+x^{-2}}}$ であるから $|s'(x)| < \frac{1}{x^3}$ である。

- $y = s(x)$：関数 $y - s$ の導関数は $y' - s' > 2$ である。$(0,2)$ 上でこの関数は $-\infty$（$y \to 0$ かつ $s \to \infty$ となるため）から $+\infty$ まで変化する。$(2,\infty)$ 上でも $-\infty$ から $+\infty$ まで変化する。それぞれに解が 1 個ずつ、合わせて 2 個である。
- $(0,2)$ 上の $y = -s(x)$：そこでは曲線は $y > 0 > -s$ を満たす。解はない。

- $(2,\infty)$ 上の $y=-s(x)$：関数 $y+s$ の導関数は $y'+s'>2-\frac{1}{8}>0$ であり、$-\infty$ から $+\infty$ まで変化する。解は 1 個である。

したがって正の解 z はちょうど 3 個である。

$-1\le z<0$ **である解**。$0<t\le 1$ として $z=-t$ とおく。方程式は

$$4t^2(t+5)^2=(t+4)^2(1-t).$$

となる。$(0,1]$ 上で左辺は 0（$t\to 0$ のとき）から 144 まで狭義単調増加である。右辺は 16 から 0 まで狭義単調減少である。その差は狭義単調増加で符号を変えるので、解はちょうど 1 個である。

よって方程式 (iii) はちょうど **4 個**の実数解をもつ。3 個は正であり、1 個は $(-1,0)$ にある。展開すると 4 次方程式 $4z^4-41z^3+107z^2-8z-16=0$ となるので、その 4 個の解はすべて実数である。

検算

- $x=1000$ において $y-2x\approx -0.002$ であり、$y=2x$ に下から近づくことが確かめられる。
- 数値的には、(i) の解は $x\approx -2.143$ と 2.401 であり、予想どおり外側の各枝に 1 個ずつある。
- (ii) の解は $x\approx \pm 0.431,\ \pm 2.155,\ \pm 2.484$ であり、双曲線の各枝について、曲線の各枝に 1 個ずつある。
- (iii) の解は $z\approx -0.332,\ 0.473,\ 4.799,\ 5.310$ である。後の 3 つから $x=\sqrt{z}\approx 0.688,\ 2.191,\ 2.304$ が得られ、曲線上の値は $y\approx 1.77,\ -1.10,\ 1.09$ となって、場合分けの結果と一致する。

よくある間違い

- $x=0$ や $x=\pm 2$ が解でないことを先に確かめずに、x や x^2-4 で割ってしまう。
- (ii) で $y=+\sqrt{x^2+1}$ との交点だけを数えて下の枝を忘れ、6 ではなく 3 としてしまう。
- (iii) で $z=x^2$ と置き換えたまま z が負になりうることを忘れ、$(-1,0)$ にある解を見落とす。

STEP のその先へ

ここでの個数の議論は、中間値の定理（intermediate value theorem）（符号を変える連続関数は零点をもつ）と狭義単調性（零点は高々 1 個である）の組み合わせに基づいている。この 2 つの事実を厳密にすることは、大学の解析学（analysis）の講義で最初に取り組む課題の一つである。Abbott の *Understanding Analysis*（解析学入門書）は、どちらも丁寧かつ読みやすく扱っている。デカルトの符号法則（Descartes' rule of signs）とスツルム列（Sturm sequences）は多項式の実数解の個数を数える代数的な方法であり、ここで用いた幾何的な方法と比べてみると興味深い。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。