解答例

STEP III 1989、第 2 問

純粋数学 ・ 空間内の平面

> **STEP III 1989、問 2**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/89-s3-q2

鍵となる考え方

東、北、上の向きに座標（coordinates）を入れる。すると各平面はグラフ $z = px + qy + r$ として表され、3 点を与えればそれぞれが一つに定まる。平面の傾きの大きさは z が水平方向にどれだけ速く変化するかだけで決まるので、角度は p と q から求まる。後半には見事な近道がある。鉱層（seam）の地表からの**深さ**もまた位置の一次関数（linear function）であり、鉱層が地表に現れるのはちょうどその深さが 0 になるところである。

解答

設定

A を原点とし、x 軸を東向き、y 軸を北向き、z 軸を鉛直上向きにとる（長さの単位はすべてメートル）。すると

$$A = (0, 0, 0), \qquad B = (0, 100, -5), \qquad C = (60, 100, -10),$$

である。B は A より 5 m 低く、C は B よりさらに 5 m 低いからである。ボーリング孔（bore-hole）は鉛直なので、それらが鉱層に達する点はこれらの真下にある：

$$A' = (0, 0, -95), \qquad B' = (0, 100, -50), \qquad C' = (60, 100, -86).$$

鉱層の傾斜角

A', B', C' は平面図上で同一直線上にない 3 点の上にあるので、鉱層は鉛直ではない。したがって鉱層は $z = px + qy + r$ と書ける。

- A' において：$r = -95$。
- A' から B' へ進むと、y は 100、z は 45 増えるので、$100q = 45$ より $q = \frac{9}{20}$。
- B' から C' へ進むと、x は 60 増え、z は -36 変化するので、$60p = -36$ より $p = -\frac{3}{5}$。

よって鉱層は

$$z = -\tfrac{3}{5}x + \tfrac{9}{20}y - 95,$$

であり、その法線ベクトル（normal vector）は $\mathbf{n} = \left(\frac{3}{5}, -\frac{9}{20}, 1\right)$、あるいは 20 倍して $(12, -9, 20)$ である。

2 つの平面のなす角は、それらの法線のなす角に等しい。水平面の法線は $\mathbf{k} = (0,0,1)$ なので、鉱層が水平面となす角 θ は

$$\cos\theta = \frac{|(12,-9,20)\cdot(0,0,1)|}{\sqrt{12^2+9^2+20^2}} = \frac{20}{\sqrt{144+81+400}} = \frac{20}{\sqrt{625}} = \frac{20}{25} = \frac{4}{5}.$$

を満たす。よって、題意のとおり鉱層は水平面に対して $\cos^{-1}\left(\frac{4}{5}\right)$ だけ傾いている。

（別の見方もある。最大傾斜線（line of greatest slope）に沿っては、水平方向に 1 m 進むごとに z が $\sqrt{p^2+q^2} = \sqrt{\frac{9}{25}+\frac{81}{400}} = \frac{3}{4}$ だけ変化する。よって $\tan\theta = \frac{3}{4}$ であり、3–4–5 の三角形から $\cos\theta = \frac{4}{5}$ となる。）

鉱層が地表に現れる場所

地表は原点を通る平面である。先ほどと同様に、A から B へ北に進むと 100 につき 5 下がり、B から C へ東に進むと 60 につき 5 下がるので、

$$z = -\tfrac{1}{12}x - \tfrac{1}{20}y.$$

考えてみよう 本当に 2 つの平面の方程式を連立して解く必要があるだろうか？

実はその必要はない。水平位置 (x,y) の点における、地表から鉱層までの深さを $d(x,y)$ とする。これは 2 つの一次関数の差なので、それ自身も一次関数である：

$$d(x,y) = \left(-\tfrac{1}{12}x - \tfrac{1}{20}y\right) - \left(-\tfrac{3}{5}x + \tfrac{9}{20}y - 95\right) = \tfrac{31}{60}x - \tfrac{1}{2}y + 95.$$

確認すると、$d(0,0) = 95$、$d(0,100) = 45$、$d(60,100) = 45+31 = 76$ であり、これらは 3 本のボーリング孔の深さに一致する。（実際、これらの値から d を直接書き下すこともできた。北へ 100 m 進むと深さは 50 減り、東へ 60 m 進むと 31 増えるのである。）

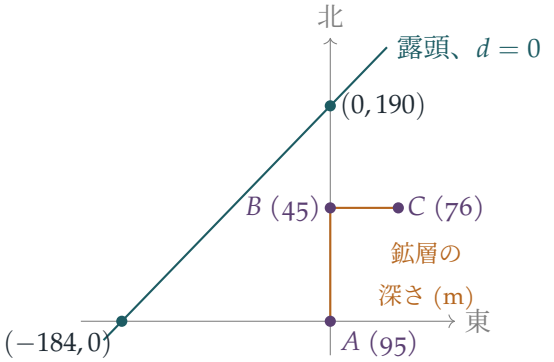
鉱層が地表に現れるのは $d = 0$ となるところであり、平面図上ではそれは直線

$$\tfrac{31}{60}x - \tfrac{1}{2}y + 95 = 0, \qquad \text{すなわち} \qquad y = \tfrac{31}{30}x + 190.$$

である。この直線に沿っては、東へ 30 m 進むと北へ 31 m 進む。よってこの直線が真北となす角を φ とすると

$$\tan\varphi = \frac{\text{東}}{\text{北}} = \frac{30}{31}, \qquad \varphi = \tan^{-1}\left(\tfrac{30}{31}\right) \approx 44.06^\circ.$$

である。したがって、この直線の方位（bearing）は $\tan^{-1}\left(\frac{30}{31}\right) \approx 044^\circ$ である。逆向きに読めば 224° となる。直線には両方の方位があり、どちらで表してもよい。この直線は北東よりわずかに西寄りに走り、平面図上では A の真北 190 m の点を通る。



検算

- 鉱層の法線 $(12, -9, 20)$ の長さはちょうど 25 なので、$\cos\theta = \frac{20}{25}$ となり、問題が予告したとおりきれいな 3–4–5 の答えになる。
- 深さの式 d は 3 本のボーリング孔の深さをすべて再現するので、2 つの平面はどちらも正しい。
- 数値的には $\tan^{-1}(30/31) = 44.0608^\circ$ である。直線 $y = \frac{31}{30}x + 190$ 上の任意の点をとると、丸め誤差の範囲で両方の平面上で同じ高さになる。

よくある間違い

- 各孔の上端からの深さを、上端がすべて同じ高さであるかのように使ってしまう。B と C は A よりそれぞれ 5 m、10 m 低いので、そこでの鉱層は A の高さから 45 m、76 m ではなく 50 m、86 m 下にある。
- 露頭（outcrop）ではなく、鉱層内の水平な直線（$-\frac{3}{5}x + \frac{9}{20}y$ が一定となる直線で、方位は $\tan^{-1}\frac{3}{4} \approx 037^\circ$）の方位を答えてしまう。地表も傾いているので、両者は異なる。
- $\tan\varphi = $ 東/北 を北/東と取り違える。方位は北から時計回りに測る。

STEP のその先へ

これは地質学者のいう「走向と傾斜（strike and dip）」の問題であり、使う道具は大学1年次のベクトル幾何のものである。すなわち $\mathbf{n} \cdot \mathbf{r} = c$ としての平面、法線を通じた平面のなす角、そして交線（line of intersection）である。深さを使う工夫は一般的な原理の一例である。2つのアフィン関数（affine function）の差はアフィン関数なので、平行でない2平面の交線は1つの一次関数の零点集合（zero set）になる。ストラング（Strang）の *Introduction to Linear Algebra*（線形代数入門）は、この描像を連立一次方程式の幾何学の中に組み込んでいる。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。