解答例

STEP III 1989、第 16 問

確率・統計 ・ 確率と仮説検定

> **STEP III 1989、問 16**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/89-s3-q16

鍵となる考え方

「はい／いいえ」で答える 3 つの特徴によって母集団は 8 つの区画に分かれ、8 つの記述はそれらの区画の割合（proportion）についての 1 次方程式にすぎない。まず緑の目の区画を埋め（そこでの条件が最も具体的である）、次にハシバミ色の目の区画を埋める。統計の部分は、ルリタニア人が長頭である確率というただ 1 つの数に基づいており、その値のもとで観測結果が意外なものかどうかを問うている。

解答

印刷された問題には書き誤りが 3 か所ある。(iv) の「arrow-headed」は**長頭**（*narrow-headed*）、(vi) の「fair-headed」は**金髪**（*fair-haired*）、(viii) の「hazel-haired」は**ハシバミ色の目**（*hazel-eyed*）と読むことにする。3 つの特徴は髪（金髪か黒髪か）、目（緑かハシバミ色か）、頭（長頭か短頭か）であるから、意味の通る読み方はこれしかない。

長頭の人の割合

ルリタニア人を無作為に 1 人選ぶ。金髪・黒髪を F, D、緑の目・ハシバミ色の目を G, H、長頭・短頭を N, B で表す。$\mathrm{P}(F) = \frac{1}{4}$ および $\mathrm{P}(G) = \frac{1}{5}$ が与えられている。

緑の目の区画。 (v) より $\mathrm{P}(N \mid G) = \mathrm{P}(B \mid G) = \frac{1}{2}$ であるから、

$$\mathrm{P}(G \cap N) = \mathrm{P}(G \cap B) = \tfrac{1}{10}.$$

(vi) より、緑の目で短頭の人は金髪と黒髪に等しく分かれる：

$$\mathrm{P}(F \cap G \cap B) = \mathrm{P}(D \cap G \cap B) = \tfrac{1}{20}.$$

(iv) より $\mathrm{P}(F \cap G \cap N) = 0$ であるから、$\mathrm{P}(D \cap G \cap N) = \frac{1}{10}$ である。

ハシバミ色の目の区画。次のようにおく。

$$a = \mathrm{P}(F \cap H \cap B), \quad b = \mathrm{P}(F \cap H \cap N), \quad c = \mathrm{P}(D \cap H \cap B), \quad d = \mathrm{P}(D \cap H \cap N).$$

- 金髪：緑の目で金髪の人は $0 + \frac{1}{20}$ を占めるので、$a + b = \frac{1}{4} - \frac{1}{20} = \frac{1}{5}$ である。
- ハシバミ色の目：$a + b + c + d = \frac{4}{5}$ であるから、$c + d = \frac{3}{5}$ である。
- 記述 (vii)：$\mathrm{P}(B \cap D) = \frac{1}{20} + c = \frac{1}{2}$ であるから $c = \frac{9}{20}$、したがって $d = \frac{3}{20}$ である。
- 記述 (viii)：$\mathrm{P}(F \cap B \mid H) = \mathrm{P}(D \cap N \mid H)$。両辺に $\mathrm{P}(H)$ を掛けると $a = d = \frac{3}{20}$ となり、よって $b = \frac{1}{20}$ である。

8 つの割合をすべて 20 分の 1 を単位として表すと、次のようになる。

	$G \cap N$	$G \cap B$	$H \cap N$	$H \cap B$
F	0	1	1	3
D	2	1	3	9

いずれも負でなく、合計は 20 であるから、このモデルは矛盾がない。長頭の列を足し合わせると、

$$\mathrm{P}(N) = \frac{0 + 2 + 1 + 3}{20} = \frac{3}{10}.$$

したがって、このモデルによればルリタニア人の 30% が長頭である。

短頭の知人 6 人

6 人の知人が互いに独立（independent）な無作為標本（random sample）であるとすれば、6 人全員が短頭である確率は

$$\left(\tfrac{7}{10}\right)^6 = 0.1176\ldots \approx 0.12.$$

考えてみよう 確率 12% の出来事は、このモデルに反する有力な証拠になるだろうか。

ならない。確率がおよそ 1 / 8 の出来事は珍しいものではなく、5% のような通常のどの水準でも有意（significant）とはならない。このデータにはもう 1 つ弱点がある。知人は無作為標本ではないのである。知人どうしは家族、地域、社会集団を共有しているかもしれないので、独立とは限らず、母集団全体を代表しているとも限らない。この観測結果は、せいぜいごくわずかな疑いの根拠を与えるにすぎない。

200 人の無作為標本

200 人の無作為標本に含まれる長頭の人数を X とする。母集団は大きいので、抽出は事実上独立であり、モデルのもとで $X \sim \mathrm{B}(200, \frac{3}{10})$ となる。ここで

$$\mathrm{E}(X) = 60, \qquad \mathrm{Var}(X) = 200 \times 0.3 \times 0.7 = 42, \qquad \sqrt{42} \approx 6.481.$$

np と $n(1-p)$ はともに大きいので、正規近似（normal approximation）$X \approx \mathrm{N}(60, 42)$ を連続性補正（continuity correction）とともに用いる：

$$\mathrm{P}(X \leq 50) \approx \Phi\left(\frac{50.5 - 60}{\sqrt{42}}\right) = \Phi(-1.466) \approx 0.071.$$

したがってモデルのもとでは、長頭が 50 人以下となることはおよそ 7% の割合で起こる。

考えてみよう ここでモデルを棄却すべきだろうか。

5% 水準では棄却されない。$p = 0.3$ 対 $p < 0.3$ の片側検定（one-tailed test）を行うと、p 値（p-value）はおよそ 0.07 である。とはいえ、この結果はモデルにいくらかの疑いを投げかける。標本比率 $\frac{50}{200} = 0.25$ は予測値よりおよそ 1.5 標準偏差（standard deviation）だけ小さい。また、予想より長頭が少なかった知人の場合と同じ方向を指している。モデルの示す 30% という値を信頼する前に、さらにデータを集めるのが賢明であろう。（両側検定（two-tailed test）であれば p 値はおよそ 0.14 となり、証拠はさらに弱くなる。）

検算

- 8 つの条件はいずれも表から直接読み取れる。たとえば (vii) は、20 分の 1 を単位として $1 + 9 = 10$ となり、これは $= \frac{1}{2}$ である。
- コンピュータで確かめると、各区画の割合が唯一の解であること、$\mathrm{P}(N) = \frac{3}{10}$ であること、$(0.7)^6 = 0.117649$ であることが確認できる。二項分布（binomial distribution）による正確な確率 $\mathrm{P}(X \leq 50) = 0.0695$ は、正規近似の値 0.0713 に近い。

よくある間違い

- (v) や (vi) を、条件付きの記述ではなく母集団全体についての記述と読んでしまうこと。緑の目の集団の中での「as likely as（同じくらい起こりやすい）」は、$\frac{1}{5}$ を半分ずつに等分するという意味である。

- 連続性補正を忘れること。50.5 の代わりに 50 を用いると $\Phi(-1.543) \approx 0.061$ となる。
- 何の断りもなく知人を無作為標本として扱うこと。

STEP のその先へ

最後の部分は仮説検定（hypothesis test）であり、2 つの証拠から自然な疑問が生じる。いくつもの弱い証拠をどのように組み合わせればよいのだろうか。大学の統計学はこれに尤度（likelihood）によって答える（ベイズ主義者であれば事後確率（posterior probabilities）によって答える）。これらは、p の各値が**すべての**データをまとめてどれだけよく説明するかを測るものである。確率論の基礎については Grimmett と Welsh の *Probability: An Introduction* が詳しく、ベイズ的な見方については Blitzstein と Hwang の *Introduction to Probability* に親しみやすい解説がある。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。