解答例

STEP III 1989、第 14 問

力学 ・ 滑車と力積

STEP III 1989、問 14

先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：

step.maths.org/questions/89-s3-q14

鍵となる考え方

小問 (i) では、円板を細い円環に切り分ける。各円環の質量はすべて中心から同じ距離にあるので、質量も慣性モーメント（moment of inertia）も r についての 1 変数の積分になる。小問 (ii) では、系全体の自由度（degree of freedom）は 1 つ（D の深さ）なので、運動方程式（equation of motion）を 1 つ立てれば加速度が求まる。B を急に止めると、糸の拘束（constraint）から、その後 D がどれだけの速さで動けるかがすぐにわかり、力積（impulse）は単にその運動量（momentum）の変化である。

解答

小問 (i)

（小問 (i) の軸は中心 O を通る軸である。問題文の「C」は誤植である。）O からの距離が r の点での密度（density）を $\rho = kr$ とする。ただし k は定数である。半径 r と $r + \mathrm{d}r$ の間の細い円環の面積は $2\pi r\,\mathrm{d}r$ なので、その質量は $2\pi kr^2\,\mathrm{d}r$ であり、円環上のどの点も軸から距離 r にある。よって

$$m = \int_0^a 2\pi kr^2\,\mathrm{d}r = \frac{2\pi ka^3}{3}, \qquad I = \int_0^a r^2 \cdot 2\pi kr^2\,\mathrm{d}r = \frac{2\pi ka^5}{5}.$$

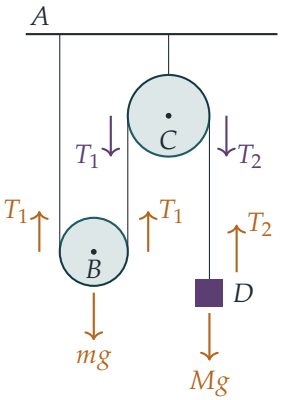
割り算をすると $I/m = \frac{3}{5}a^2$ となるので、

$$I = \tfrac{3}{5}ma^2,$$

となり、示すべき式が得られた。（これは一様な円板の $\frac{1}{2}ma^2$ より大きいが、そうなるべきである。質量の多くが縁の近くにあるからである。）

小問 (ii)：B を止める前の運動

モデル：B は質量 m のなめらかな滑車（pulley）であり、C は (i) の型の円板で、質量 m、半径 a である。したがって、固定軸のまわりの慣性モーメントは $\frac{3}{5}ma^2$ である。糸は軽く、伸び縮みせず（inextensible）、C の上を滑らない。B はなめらかなので、2 本の部分 AB と BC の張力（tension）T_1 は等しい。部分 CD の張力を T_2 とする。C は粗いので、T_2 が T_1 に等しいとは限らない。



D が加速度 f で下向きに動くとする。B を支える 2 本の部分は、それぞれ CD が伸びる量の半分ずつ縮むので、B は加速度 $\frac{1}{2}f$ で上昇する。また、糸は C の上を滑らないので、C の角加速度（angular acceleration）は f/a である。運動方程式は次のようになる。

$$\begin{aligned} D\,(\text{下向き}):&\quad Mg - T_2 = Mf,\\ B\,(\text{上向き}):&\quad 2T_1 - mg = \tfrac{1}{2}mf,\\ C\,(\text{軸のまわりのモーメント}):&\quad (T_2 - T_1)a = \tfrac{3}{5}ma^2 \cdot \frac{f}{a}. \end{aligned}$$

$T_2 = Mg - Mf$ と $T_1 = \frac{1}{2}mg + \frac{1}{4}mf$ を最後の式に代入すると、

$$Mg - Mf - \tfrac{1}{2}mg - \tfrac{1}{4}mf = \tfrac{3}{5}mf \quad\Longrightarrow\quad f\left(M + \tfrac{17}{20}m\right) = g\left(M - \tfrac{1}{2}m\right),$$

となるので、

$$f = \frac{10(2M - m)g}{20M + 17m}.$$

これは定数であり、正になるのはちょうど $m < 2M$ だからである。この条件が課されているのはそのためである。これにより、D は確かに静止状態から下降することがわかる。したがって t 秒後に D が下向きに動く速さは

$$v = ft = \frac{10(2M - m)gt}{20M + 17m},$$

であり、B は速さ $\frac{1}{2}v$ で上昇し、C は角速度 v/a で回転している。

（エネルギーによる検算でも同じ f が得られる。D が x だけ落下したとき、運動エネルギーは $\frac{1}{2}(M+\frac{1}{4}m+\frac{3}{5}m)\dot{x}^2$ であり、失われた位置エネルギーは $(M-\frac{1}{2}m)gx$ である。）

小問 (ii)：力積

考えてみよう B を止めた後も、D は動けるだろうか？

糸が張っている間は、D の速さは常に B の速さの 2 倍である。A は固定されていて、AB と BC はそれぞれ同じ量だけ長さが変わるからである。B が静止すると、これら 2 つの長さはどちらも固定されるので、糸は C を回って移動できず、D も止まらなければならない。C も同様である。糸は実際に張ったままである。D は C から遠ざかる向きに動いているので CD をぴんと引っ張り、まだ回転している C は BC 側から糸を巻き上げるので、その部分もぴんと引っ張られる。（実際、撃力的な張力（impulsive tension）は CD で Mv、BC で $(M+\frac{3}{5}m)v$ となり、どちらも正であるから、このことが確かめられる。）

したがって、D の速度は下向きの v から 0 に下がり、（糸から）D が受ける力積はその運動量の変化に等しい：

$$\text{力積：対象}D = Mv = \frac{10M(2M-m)gt}{20M+17m} \quad \text{鉛直上向き。}$$

検算

- $m \to 0$（軽い滑車）とすると $f \to g$ となり、力積は Mgt である。予想どおり、D は単に自由落下する。
- $m = 2M$ のとき力積は 0 である。系はつり合いの状態にあり、動き出すことはない。
- $M = 3$、$m = 2.5$、$g = 9.8$、$t = 1.3$ として運動を数値的に追跡すると $Mv \approx 13.0507$ となって公式と一致し、増加した運動エネルギーは失われた位置エネルギーと一致する。数値積分による慣性モーメントの比は 0.6000 である。

よくある間違い

- C の両側の張力を同じとしてしまうこと。滑車 C は質量をもち粗いので、まさにその張力の差が C を回転させるのである。
- B が D の半分の速さで動くことを忘れること。これにより有効質量（effective mass）には m ではなく $\frac{1}{4}m$ が現れる。

▶ 力積の向きを書かずに答えること。力積は D に上向きに働く。

STEP のその先へ

運動エネルギーを 1 つの座標で $\frac{1}{2}M_{\text{eff}}\dot{x}^2$ と書くことは、ラグランジュ力学（Lagrangian mechanics）の出発点である。ラグランジュ力学では、滑車の幾何のような拘束がはじめから組み込まれており、張力は一切現れない。B を止めるような突然の拘束も、撃力的な方程式を用いて同じように扱われる。Kleppner and Kolenkow, *An Introduction to Mechanics*（力学入門）は、剛体（rigid body）の回転と力積をこのスタイルで扱っている。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。