解答例

# STEP III 1989、第 13 問

力学 ・ 単振動

> **STEP III 1989、問 13**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/89-s3-q13

## 鍵となる考え方

各糸は $O$（台の下）から穴を通って台の上を横切り、$P$ まで張られている。台の下の部分の長さはつねにちょうど自然長（natural length）$a$ に等しいので、各糸の伸び（extension）は単に $P$ からその穴までの距離である。したがって各張力（tension）はあるベクトルに比例し、位置ベクトル（position vector）を用いれば 5 つの力の和は 1 行で求まる。5 つの穴は対称に配置されていて、その位置ベクトルの和が零になるからである。

## 解答

### 設定

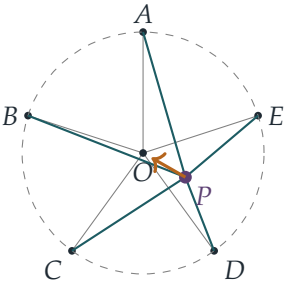
$P$ をなめらかな台の上の質点、糸を軽い弾性糸（elastic string）、穴をなめらかなものとしてモデル化する。したがって張力は各糸の全体にわたって等しい。台の上の $O$ を原点にとり、$P$ の位置ベクトルを $\mathbf{r}$、$A, \ldots, E$ の位置ベクトルを $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_5$ とする。これらの長さはいずれも $a$ である。

穴 $i$ を通る糸は、$O$（台の下、中心の真下）から穴までの長さ $a$ の鉛直な部分と、台の上の長さ $|\mathbf{a}_i - \mathbf{r}|$ の部分からなる。全長は $a + |\mathbf{a}_i - \mathbf{r}|$ なので、伸びは $|\mathbf{a}_i - \mathbf{r}|$ である。これは決して負にならないので、$P$ がどこにあっても、どの糸も張っている（$P$ が穴の位置にあるときはちょうどたるむ寸前である）。つまり、糸がたるんで方程式が変わることはない。フックの法則（Hooke's law）より張力は $\frac{\lambda}{a}|\mathbf{a}_i - \mathbf{r}|$ であり、台の上では $P$ を穴の方へ、すなわち単位ベクトル（unit vector）$\frac{\mathbf{a}_i - \mathbf{r}}{|\mathbf{a}_i - \mathbf{r}|}$ の向きに引く。よって糸 $i$

から $P$ にはたらく力は

$$\frac{\lambda}{a}|\mathbf{a}_i - \mathbf{r}| \cdot \frac{\mathbf{a}_i - \mathbf{r}}{|\mathbf{a}_i - \mathbf{r}|} = \frac{\lambda}{a}(\mathbf{a}_i - \mathbf{r}).$$

である。




青緑色の線は台の上の 5 本の糸を上から見たものであり、琥珀色の矢印は $P$ にはたらく合力（resultant force）を表す。合力はまっすぐ $O$ を向いている。

## 前半

$P$ にはたらく鉛直方向の力（重力と垂直抗力（normal reaction））はつり合っている。5 つの水平方向の力を加えると、

$$\mathbf{F} = \frac{\lambda}{a}\sum_{i=1}^{5}(\mathbf{a}_i - \mathbf{r}) = \frac{\lambda}{a}\Big(\sum_{i=1}^{5}\mathbf{a}_i\Big) - \frac{5\lambda}{a}\mathbf{r}.$$

**考えてみよう** なぜ $\mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_2 + \mathbf{a}_3 + \mathbf{a}_4 + \mathbf{a}_5 = \mathbf{0}$ となるのか？

図全体を $O$ のまわりに 72° 回転すると 5 つの穴が入れ替わるだけなので、和 $\mathbf{s} = \sum \mathbf{a}_i$ は変わらない。しかし 72° の回転で変わらないベクトルは零ベクトルだけであるから、$\mathbf{s} = \mathbf{0}$ である。（同じことだが、1 の 5 乗根（fifth roots of unity）の和は 0 である。）

したがって、ニュートンの運動の第 2 法則（Newton's second law）より

$$m\ddot{\mathbf{r}} = -\frac{5\lambda}{a}\mathbf{r}, \qquad \text{すなわち} \qquad \ddot{\mathbf{r}} = -\omega^2\mathbf{r} \quad \text{ただし} \quad \omega^2 = \frac{5\lambda}{am}.$$

$P$ は $F$ で静止した状態から動き出すので、$\mathbf{r}(0) = \overrightarrow{OF}$、$\dot{\mathbf{r}}(0) = \mathbf{0}$ である。解は $\mathbf{r} = \cos(\omega t)\,\overrightarrow{OF}$ であるから、$P$ は直線 $FO$ 上を往復し（$O$ に関して $F$ と対称な点まで行って戻ってくる）、$O$ からの変位は単振動（simple harmonic motion）の方程式を満たす。周期（period）は

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{am}{5\lambda}},$$

となり、示された。（これは小さな変位に限らず、**任意の**出発点 $F$ について成り立つことに注意せよ。力の法則が厳密に線形だからである。）

### 後半

ここで糸 $PAO$ の弾性係数（modulus）は $k\lambda$ であるから、この糸から $P$ にはたらく力は $\frac{k\lambda}{a}(\mathbf{a}_1 - \mathbf{r})$ である。$\mathbf{a}_2 + \mathbf{a}_3 + \mathbf{a}_4 + \mathbf{a}_5 = -\mathbf{a}_1$ を用いると、

$$\begin{aligned}\mathbf{F} &= \frac{k\lambda}{a}(\mathbf{a}_1 - \mathbf{r}) + \frac{\lambda}{a}\sum_{i=2}^{5}(\mathbf{a}_i - \mathbf{r}) \\ &= \frac{k\lambda}{a}(\mathbf{a}_1 - \mathbf{r}) + \frac{\lambda}{a}(-\mathbf{a}_1 - 4\mathbf{r}) \\ &= \frac{\lambda}{a}[(k-1)\mathbf{a}_1 - (k+4)\mathbf{r}] = -\frac{(k+4)\lambda}{a}(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0), \qquad \mathbf{r}_0 = \frac{k-1}{k+4}\mathbf{a}_1.\end{aligned}$$

よって平衡位置（equilibrium position）は $OA$ 上の点 $\mathbf{r}_0$（$\mathbf{F} = \mathbf{0}$ となる点）であり、

$$\ddot{\mathbf{r}} = -\frac{(k+4)\lambda}{am}(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0).$$

$P$ を $\mathbf{r}_0$ から $OA$ に沿ってずらし、静かに放すと、$\mathbf{r} - \mathbf{r}_0$ ははじめ $\mathbf{a}_1$ に平行であり、加速度はつねに $\mathbf{r} - \mathbf{r}_0$ に平行で、初速度は零である。したがって前半とまったく同様に $\mathbf{r} - \mathbf{r}_0 = \cos(\omega' t)(\mathbf{r}(0) - \mathbf{r}_0)$ となる。つまり $P$ は $OA$ に沿って直線運動をし、$\mathbf{r}_0$ を中心とする角振動数（angular frequency）$\omega'$ の単振動をする。ここで

$$\omega'^2 = \frac{(k+4)\lambda}{am}.$$

である。周期が $T/2$ となるのは $\omega' = 2\omega$、すなわち $\omega'^2 = 4\omega^2$ のときであり、そのときに限る：

$$\frac{(k+4)\lambda}{am} = \frac{20\lambda}{am} \quad \Longrightarrow \quad k+4 = 20 \quad \Longrightarrow \quad k = 16.$$

$k = 16$ のとき平衡位置は $\mathbf{r}_0 = \frac{15}{20}\mathbf{a}_1$ であり、$O$ から $A$ までの 4 分の 3 の位置にある。（このモデルが成り立つためには、$P$ が $A$ の穴に達しないよう、振幅（amplitude）が $\frac{1}{4}a$ より小さくなければならない。）

## 検算

- $k = 1$ とおくと前半の結果が得られる：$\mathbf{r}_0 = \mathbf{0}$、$\omega'^2 = 5\lambda/(am)$。
- 単位：$\lambda$ は力なので、$\lambda/(am)$ の単位は $\mathrm{N}/(\mathrm{m\,kg}) = \mathrm{s}^{-2}$ であり、$T$ は時間の単位をもつ。
- 1000 個のランダムな位置で 5 つの張力ベクトルの和を計算したところ（$a = 1.3$、$m = 0.7$、$\lambda = 2.1$）、正確に $-5\lambda\mathbf{r}/a$ となり、$k = 16$ のときは正確に $-20\lambda(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0)/a$ となった。$(0.4, -0.3)$ から運動を数値的に追跡すると、$P$ は $O$ を通る直線上にとどまったまま、時間 $T \approx 1.85$ 後に出発点に戻った。$k = 16$ で $\mathbf{r}_0 + 0.1a\,\hat{\mathbf{a}}_1$ から出発すると、$T/2$ 後に戻った。

## よくある間違い

- 伸びを $|\mathbf{a}_i - \mathbf{r}| - a$ や $|\mathbf{r}|$ としてしまうこと。自然長 $a$ は台の下の部分でちょうど使い切られている。
- 5 つの張力を角度と三角関数を使って分解すること。それでも解けるが、ベクトルを使えば打ち消し合いがすぐにわかる。
- 新しい振動もまだ $O$ を中心としていると思い込むこと。より硬い糸が平衡位置を $A$ の方へ引き寄せる。

## STEP のその先へ

2 次元における力 $\mathbf{F} = -c\,\mathbf{r}$ は等方調和振動子（isotropic harmonic oscillator）を与える。一般の運動（横向きの初速度がある場合）は平衡点を中心とする楕円であり、どの軌道も同じ周期をもつ。逆二乗則（inverse-square law）とともに、これは有界な軌道がすべて閉じるようなたった 2 つの中心力（central force）のうちの 1 つである（ベルトランの定理（Bertrand's theorem））。Kleppner and Kolenkow, *An Introduction to Mechanics*（力学入門）は、振動子と中心力をこのようなベクトルの流儀で扱っている。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。