解答例

STEP III 1989、第 12 問

力学 ・ 回転座標系

> **STEP III 1989、問 12**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/89-s3-q12

鍵となる考え方

平面は滑らか（smooth）で、棒は軽く（light）、自由に回転できるように軸支されている（freely pivoted）。したがって P にはたらく水平方向の力は棒に沿った向きの力だけである。よって、P の加速度（acceleration）のうち AP に垂直な成分は 0 でなければならない。その成分を求めて 0 とおけば ϕ についての振り子の方程式（pendulum equation）が得られ、おなじみの「$\dot{\phi}$ を掛けて積分する」という手法で ϕ が求まる。

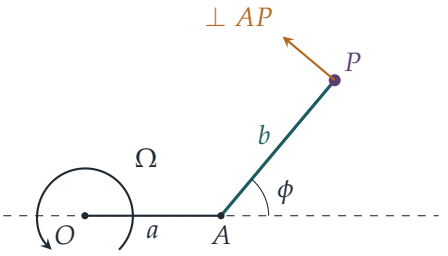
解答

モデル化と設定

P を滑らかな平面上の質点とみなし、棒は軽い剛体で A において自由に回転できるように軸支されているとする。固定された慣性系（inertial frame）で考える。平面上の位置を複素数（complex numbers）で表し、O を原点、$t = 0$ における OA の向きを実軸とし、$\Omega > 0$ を反時計回りにとる。A は平面に固定されているので半径 a の円周上を動き、AP は OA の延長と角 ϕ をなす。OA の延長そのものは角 Ωt だけ回転している。そこで $\theta = \Omega t + \phi$ とおくと、

$$z_A = a\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\Omega t}, \qquad z_P = a\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\Omega t} + b\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}.$$

ここで $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$ は AP 方向の単位ベクトル（unit vector）であり、$\mathrm{i}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$ は AP に垂直で ϕ が増加する向きの単位ベクトルである。



加速度の垂直成分

$\dot\theta = \Omega + \dot\phi$、$\ddot\theta = \ddot\phi$（$\Omega$ は定数であるから）に注意して微分すると、

$$\dot z_P = \mathrm{i}a\Omega\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\Omega t} + \mathrm{i}b(\Omega+\dot\phi)\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta},$$
$$\ddot z_P = -a\Omega^2\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\Omega t} + b(\mathrm{i}\ddot\phi - (\Omega+\dot\phi)^2)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}.$$

AP に平行な成分と垂直な成分に分解するために、$\mathrm{e}^{\mathrm{i}\Omega t} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\phi} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}(\cos\phi - \mathrm{i}\sin\phi)$ と書く。すると

$$\ddot z_P = [-a\Omega^2\cos\phi - b(\Omega+\dot\phi)^2]\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} + [\,b\ddot\phi + a\Omega^2\sin\phi\,]\,\mathrm{i}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}.$$

よって、P の加速度の AP に垂直で ϕ が増加する向きの成分は

$$\boxed{b\,\frac{\mathrm{d}^2\phi}{\mathrm{d}t^2} + a\Omega^2\sin\phi}$$

である。（第 1 項は、A を中心とする円運動でおなじみの $b\ddot\phi$ である。第 2 項は、A 自身がもつ O に向かう向心加速度（centripetal acceleration）$a\Omega^2$ を、棒に垂直な方向に分解したものから生じる。）

$\mathrm{d}\phi/\mathrm{d}t$ を求める

考えてみよう なぜこの加速度の成分は 0 でなければならないのか。

P にはたらく力は、重力と垂直抗力（normal reaction）（どちらも鉛直方向で、つり合っている）、そして棒からの力である。平面は滑らかなので摩擦（friction）ははたらかない。A で自由に回転できるように軸支された軽い棒は、自身の長さ方向にしか押したり引いたりできない。したがって AP に垂直な水平方向の力は存在せず、ニュートン（Newton）の運動の第 2 法則より

$$b\ddot\phi + a\Omega^2\sin\phi = 0.$$

これは振り子の方程式である。$\dot\phi$ を掛けて積分すると、

$$\tfrac{1}{2}b\dot\phi^2 = a\Omega^2\cos\phi + C.$$

初期条件（*initial conditions*）。はじめ O、A、P は一直線上にある。$b > a$ であるから P は O と A の間にはあり得ず、P は A の先にあるとする。よって $t = 0$ で $\phi = 0$ である。このとき 2 つの指数関数はともに 1 に等しく、

$$\dot{z}_P(0) = \mathrm{i}[(a+b)\Omega + b\dot{\phi}(0)],$$

となり、これは OP（実軸）に垂直である。$(a+b)\Omega$ はちょうど P の真下にある平面上の点の速さであり、$b\dot{\phi}(0)$ は平面に対する P の相対的な速さであることに注意する。問題文に印刷された速さは $(a+2\sqrt{ab})\Omega$ であるが、これは $(a+b+2\sqrt{ab})\Omega = (\sqrt{a}+\sqrt{b})^2\Omega$ の誤植であると思われる。後者こそが与えられた結果を導く値である（最後の注意を参照）。この値を用いると、P は平面に対して速さ $2\sqrt{ab}\,\Omega$ で動くので、

$$\dot{\phi}(0) = 2\Omega\sqrt{a/b}.$$

エネルギーの式に $\phi = 0$ を代入すると $\frac{1}{2}b \cdot 4a\Omega^2/b = a\Omega^2 + C$ となるので、$C = a\Omega^2$ であり、

$$\tfrac{1}{2}b\dot{\phi}^2 = a\Omega^2(1+\cos\phi) = 2a\Omega^2\cos^2\tfrac{\phi}{2}, \qquad \text{よって} \qquad \dot{\phi}^2 = \frac{4a\Omega^2}{b}\cos^2\tfrac{\phi}{2}.$$

はじめ $\dot{\phi} > 0$ であり、$\dot{\phi}$ の符号が変わるには 0 を通過しなければならない。そのためには $\cos\frac{\phi}{2} = 0$、すなわち $\phi = \pm\pi$ が必要である。したがって $-\pi < \phi < \pi$ である限り正の平方根をとって、

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}t} = 2\Omega\sqrt{\frac{a}{b}}\cos\frac{\phi}{2}}$$

P は決して OA を横切らない

> **考えてみよう** ϕ がじわじわと π に近づき、そのまま越えてしまうことはないのか。

P が直線 OA 上にあるのは ϕ が π の整数倍のときに限る（$\phi = \pi$ のとき、P は O の先、距離 $b-a$ の位置にある）。$0 \le \phi < \pi$ の間は $\dot{\phi} > 0$ であるから ϕ は 0 から増加し、直線上に戻る唯一の方法は $\phi = \pi$ に達することである。方程式を解くことで、これが決して起こらないことを示す。$k = \sqrt{a/b}$ として変数分離（separating the variables）すると、

$$\int_0^{\phi} \sec\tfrac{u}{2}\,\mathrm{d}u = 2k\Omega t \quad \Longrightarrow \quad \ln\Big(\sec\tfrac{\phi}{2} + \tan\tfrac{\phi}{2}\Big) = k\Omega t.$$

$s = \sin\frac{\phi}{2}$ とおくと $\sec\frac{\phi}{2} + \tan\frac{\phi}{2} = \frac{1+s}{\sqrt{1-s^2}} = \sqrt{\frac{1+s}{1-s}}$ であるから、左辺は $\frac{1}{2}\ln\frac{1+s}{1-s} = \operatorname{artanh} s$ である。よって

$$\sin\frac{\phi}{2} = \tanh\Big(\Omega t\sqrt{\tfrac{a}{b}}\Big).$$

すべての $t > 0$ に対して右辺は 0 と 1 の間の値（両端を含まない）をとるので、すべての $t > 0$ に対して $0 < \phi < \pi$ である。したがって P は常に直線 OA の一方の側に厳密にとどまる。$t \to \infty$ のとき P は（O の先の点で）直線に近づくが、決して到達しない。よって P は決して OA を横切らない。 ■

（解かずに示すこともできる。$\phi = \pi$、$\dot{\phi} = 0$ は振り子の方程式の平衡点（equilibrium）であり、その近くでは $\psi = \pi - \phi$ が $\dot{\psi} \approx -k\Omega\psi$ を満たすので、ψ は指数関数的に減衰し、決して 0 にならない。）

印刷された速さについての注意。 速さを文字どおり $(a + 2\sqrt{ab})\Omega$ とすると $\dot{\phi}(0) = (2k-1)\Omega$ となり、同様に積分すると $\dot{\phi}^2 = \Omega^2[(2k-1)^2 - 4k^2 \sin^2 \frac{\phi}{2}]$ を得る。これはすっきりした式ではない。このとき、$b < 16a$ ならば P は $\phi = 0$ のまわりで振動し（振れるたびに OA の延長を横切る）、$b > 16a$ ならば P はぐるりと一周して OA を横切る。したがって、印刷された値が意図されたものであるはずがない。

検算

- $a = 0$ とすると A は O に一致し、$\dot{\phi} \equiv 0$ となる。つまり P は単に平面とともに速さ $b\Omega$ で回る。初速が $b\Omega$ になるので、これは正しい。
- 単位（units）：$\Omega\sqrt{a/b}$ は変化率であるから単位は s^{-1} であり、$\dot{\phi}$ の単位として適切である。
- $a = 1$、$b = 3$、$\Omega = 1.3$ として $b\ddot{\phi} = -a\Omega^2 \sin\phi$ を数値的に（RK4 法で）計算した。$t = 2$ では $\phi \approx 2.2644$、$\dot{\phi} \approx 0.6375$ となり、$2\arcsin\tanh(\Omega t\sqrt{a/b})$ および $2\Omega\sqrt{a/b}\cos\frac{\phi}{2}$ と有効数字 10 桁まで一致した。$t = 10$ では $\phi \approx 3.1394 < \pi$ であった。

よくある間違い

- P の初速度に対する座標系自身の寄与 $(a+b)\Omega$ を忘れ、与えられた速さを平面に対する相対的な速さとして扱ってしまう。
- P の加速度を、A のまわりの円運動の加速度だけで書いてしまう。軸 A 自身も加速しており、$a\Omega^2 \sin\phi$ はそこから生じる。
- $a\Omega^2 \sin\phi$ の符号を間違える。符号が逆だと $\phi = 0$ が不安定になってしまうが、「遠心力（centrifugal force）」による引っ張りは O から遠ざかる向きなので、これは物理的にあり得ない。

STEP のその先へ

回転する平面から見ると、P は OA の延長方向を向いた一様な「重力」$a\Omega^2$ の中にぶら下がった振り子である。コリオリ力（Coriolis force）は棒に沿ってはたらくので仕事をせず、方程式から消える。初期条件は、運動をちょうど**セパラトリクス**（separatrix）の上に置いている。セパラトリクスとは、往復振動と頂点を越えて回転する運動との境界であり、その上では振り子が倒立した位置に達するのに無限の時間がかかる。回転座標系（rotating frame）、見かけの力（fictitious force）、そしてこのような相平面（phase plane）の図については、Kleppner と Kolenkow による *An Introduction to Mechanics*（力学入門）で扱われている。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。