解答例

STEP III 1989、第 11 問

力学 ・ 球の斜め衝突

STEP III 1989、問 11

先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：

step.maths.org/questions/89-s3-q11

鍵となる考え方

まず衝突（impact）の瞬間の幾何学的配置を確定させる。これによって中心線（line of centres）が決まり、残りはすべてそこから導かれる。次に、一方が拘束を受けている場合のなめらかな球どうしの斜衝突（oblique impact）に対する標準的な手順を用いる。球どうしの間の力積（impulse）は中心線に沿って働く。ニュートンの反発の法則（Newton's law of restitution）は、その線に沿った速度成分に対して適用される。そして、糸や支点がそれ自身の力積を与えるために成り立たなくなる運動量保存（conservation of momentum）の代わりに、拘束の影響を受けない方程式を用いる。すなわち、糸につながれた A については水平方向の運動量を、棒の場合は O のまわりの角運動量（angular momentum）を用いる。

解答

衝突時の幾何学的配置

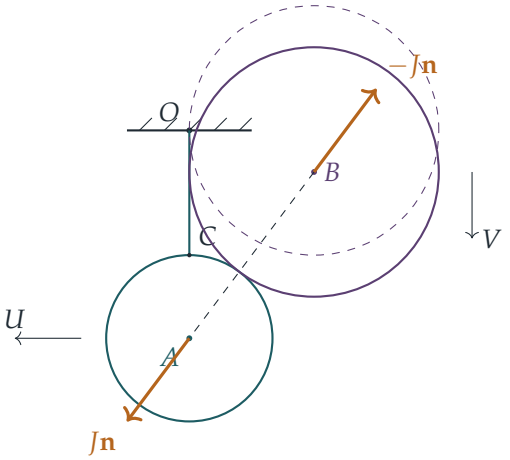
2 つの球はともになめらかで一様であり、糸は軽く伸び縮みしないものとしてモデル化する。衝突前、糸は鉛直に垂れている。C は直線 OA 上にあるので $OA = 3a + 2a = 5a$ であり、A は O の真下にある。

球 B は $OB = 3a$ が水平な位置から出発し、鉛直に落下する。落下距離を h とする。衝突時には 2 つの球が接するので $AB = 2a + 3a = 5a$ である。A と B の水平方向の距離は $3a$ であるから、鉛直方向の距離は $\sqrt{25a^2 - 9a^2} = 4a$ となる。よって B は A より $4a$ 上、すなわち O の高さより a 下にあり、$h = a$ である。

したがって中心線は 3–4–5 の直角三角形をなす。B から A へ向かって、水平方向に

（OA の方へ）$3a$、下向きに $4a$ 進む。B から A へ向かう単位ベクトルを $\mathbf{n}$ とし、x 軸を水平に、OA から B へ向かう向きにとる。すると

$$\mathbf{n} = \left(-\tfrac{3}{5}, -\tfrac{4}{5}\right).$$



破線の球は B の出発位置を、実線の球は衝突時の位置を表す。

糸の場合の衝突

球どうしの間の力積の大きさを J とし、A は $J\mathbf{n}$ を、B は $-J\mathbf{n}$ を受けるとする。球はなめらかなので、$J\mathbf{n}$ は中心線に沿って働き、A を通る。糸の力積は OC に沿って働き、これも A を通る。したがって球 A に回転を与えるものは何もなく、A は O を中心とする半径 $5a$ の円周上を質点として運動する。衝突直後も糸は鉛直なので、A は水平に、x の負の向きに速さ U で運動する。

球 A の水平方向。糸は水平方向の力積を与えないので、

$$3mU = \tfrac{3}{5}J, \qquad \text{すなわち} \qquad J = 5mU.$$

（鉛直方向には、糸が上向きの力積 $\frac{4}{5}J$ を与え、$J\mathbf{n}$ の下向き成分を打ち消す。これは正なので、糸は確かにたるまずに張ったままである。）

球 B。衝突前は $\mathbf{v}_B = (0, -V)$ であり、その $\mathbf{n}$ 方向の成分は $\frac{4}{5}V$ である。力積 $-J\mathbf{n}$ はこの成分だけを変化させ、それを $J/(25m)$ だけ減らす：

$$\mathbf{v}_B' \cdot \mathbf{n} = \tfrac{4}{5}V - \frac{J}{25m} = \tfrac{4}{5}V - \tfrac{1}{5}U.$$

考えてみよう なぜ単純に中心線方向の運動量を保存させてはいけないのか？

糸が A に与える力積は鉛直方向であり、これは $\mathbf{n}$ 方向の成分をもつ。そのため $\mathbf{n}$ 方向の運動量の総和は変化する。外部からの力積が働かない方向は水平方向だけであり、それこそが A について用いた方程式である。

反発。 $\mathbf{n}$ 方向について、A は静止状態から始まるので、近づく速さは $\frac{4}{5}V - 0$ である。遠ざかる速さは $\mathbf{v}'_A \cdot \mathbf{n} - \mathbf{v}'_B \cdot \mathbf{n}$ であり、ここで $\mathbf{v}'_A \cdot \mathbf{n} = (-U)(-\frac{3}{5}) = \frac{3}{5}U$ である。よって

$$\tfrac{3}{5}U - \left(\tfrac{4}{5}V - \tfrac{1}{5}U\right) = \tfrac{3}{4} \cdot \tfrac{4}{5}V \quad \Longrightarrow \quad \tfrac{4}{5}U = \tfrac{7}{5}V \quad \Longrightarrow \quad U = \tfrac{7}{4}V.$$

棒の場合の衝突

今度は球と棒が、O のまわりに回転する 1 つの剛体（rigid body）をなす。支点はどの向きにも力積を与えうるので、水平方向の運動量はもはや保存されない。しかし支点の力積は O に働くので、O のまわりのモーメントを考える。O のまわりの慣性モーメント（moment of inertia）は、平行軸の定理（parallel axis theorem）により

$$I = \tfrac{2}{5}(3m)(2a)^2 + 3m(5a)^2 = \tfrac{24}{5}ma^2 + 75ma^2 = \tfrac{399}{5}ma^2.$$

力積 $J\mathbf{n}$ は O より深さ $5a$ だけ下にある A を通って働く。O のまわりにモーメントをもつのはその水平成分 $\frac{3}{5}J$ だけであり、そのモーメントは $5a \cdot \frac{3}{5}J = 3aJ$ である。衝突直後の物体の角速度を ω とすると、A は速さ $U' = 5a\omega$ で水平に運動し、

$$I\omega = 3aJ \quad \Longrightarrow \quad \tfrac{399}{5}ma^2 \cdot \frac{U'}{5a} = 3aJ \quad \Longrightarrow \quad J = \tfrac{133}{25}\,mU'.$$

B についての方程式と反発の方程式は、$\mathbf{n}$ 方向の成分しか含まないので、前とまったく同じである。よって

$$\tfrac{3}{5}U' - \left(\tfrac{4}{5}V - \frac{J}{25m}\right) = \tfrac{3}{5}V \quad \Longrightarrow \quad \left(\tfrac{3}{5} + \tfrac{133}{625}\right)U' = \tfrac{7}{5}V \quad \Longrightarrow \quad \tfrac{508}{625}U' = \tfrac{7}{5}V,$$

したがって $U' = \frac{875}{508}V$ である。これを $U = \frac{7}{4}V$ と比べると、

$$\frac{U'}{U} = \frac{875}{508} \cdot \frac{4}{7} = \frac{500}{508} = \frac{125}{127},$$

となり、衝突直後の A の速さは、求めるとおり $125U/127$ である。

答えが前より少し小さくなるのは理にかなっている。糸の場合、A は質量 $3m$ の質点として水平方向の運動に抵抗する。棒の場合、球は回転も始めなければならず、A における実効的な水平方向の質量は $I/(5a)^2 = \frac{399}{125}m$ となり、これは $3m$ よりわずかに大きい。

検算

- エネルギー：$m = a = V = 1$ とすると、衝突前の運動エネルギー（kinetic energy）は 12.5 である。衝突後は、糸の場合 11.625、棒の場合約 11.58 となる。$e < 1$ のと

きそうでなければならないとおり、どちらも小さくなっている。

- 弾性（elastic）の極限：$e = 1$ で糸の場合、同じ手順により $\frac{4}{5}U = \frac{8}{5}V$、よって $U = 2V$ となり、運動エネルギーは厳密に保存される。これにより符号が正しいことが確かめられる。
- $a = m = V = 1$ として、コンピュータで両方の衝突を厳密な分数で解いた。その結果 $U = 7/4$、$U' = 875/508$ が得られ、比は $125/127$ となった。また、B の接線方向の速度（tangential velocity）が変化しないこと、および B が接触前に距離 a だけ落下することも確認した。

よくある間違い

- 中心線方向の運動量の総和を保存させてしまう。糸や支点は、その方向の成分をもつ外部からの力積を与える。
- 棒につながれた球が回転することを忘れる。O のまわりの慣性モーメントには、$3m(5a)^2$ に加えて $\frac{2}{5}(3m)(2a)^2$ の項が必要である。
- 中心線を 45° や鉛直にとってしまう。接するという条件により、中心線は 3–4–5 の直角三角形として定まる。

STEP のその先へ

拘束を受けた衝突は、**剛体の撃力運動**への最初の入り口である。一般的な規則として、固定された支点に働く力積は、その支点のまわりの角運動量の方程式から消える。これは**打撃の中心**（centre of percussion）という考え方につながる。打撃の中心とは、支点のある物体をそこで打つと支点がまったく力積を受けない点のことであり、クリケットのバットに「スイートスポット」があるのはこのためである。Kleppner と Kolenkow の *An Introduction to Mechanics*（力学入門）は、角運動量と剛体の力積をちょうどこのレベルで扱っている。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。