解答例

STEP III 1989、第 10 問

純粋数学 ・ リーマン和

> **STEP III 1989、問 10**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/89-s3-q10

この問題は、*Beyond STEP* の第 4.1 節「**積分とは何か？**」で詳しく解説されている：
https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/ch04/riemann.html

鍵となる考え方

連続する整数の積は r^5 の「下降冪」（falling power）版であり、r^5 を積分するのとまったく同じように、望遠鏡和（telescoping）によって和を求めることができる。すなわち、連続する二つの 6 項の積の差は、5 項の積の 6 倍になる。小問 (i) と (ii) では、$\sum r^5$ のわずかに上とわずかに下にある積の和が得られる。小問 (iii) では、x^5 の二つのリーマン和（Riemann sum）をこれらの上下の評価で挟み込む。上下の評価はどちらも同じ極限に近づく。

解答

小問 (i)

$P(r) = r(r+1)(r+2)(r+3)(r+4)(r+5)$ とおく。$P(r)$ と $P(r-1) = (r-1)r(r+1)(r+2)(r+3)(r+4)$ は五つの因数 $r(r+1)\cdots(r+4)$ を共有するので、

$$\begin{aligned} P(r) - P(r-1) &= r(r+1)(r+2)(r+3)(r+4)\big[(r+5) - (r-1)\big] \\ &= 6\,r(r+1)(r+2)(r+3)(r+4). \end{aligned}$$

$r=1$ から n まで和をとると、右辺は望遠鏡和として打ち消し合う：

$$\sum_{r=1}^{n} r(r+1)(r+2)(r+3)(r+4) = \tfrac{1}{6}\sum_{r=1}^{n}\big[P(r)-P(r-1)\big] = \tfrac{1}{6}\big[P(n)-P(0)\big]$$
$$= \tfrac{1}{6}\,n(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)(n+5),$$

ここで $P(0)=0$ を用いた。（n に関する数学的帰納法（induction）でも同様に示せる。帰納段階は同じ因数分解（factorisation）である。）

結論を導く。$r\geq 1$ ならば、$k=1,2,3,4$ に対して各因数は $r+k>r>0$ を満たすので、

$$r^5 < r(r+1)(r+2)(r+3)(r+4) \qquad (r\geq 1).$$

これらの狭義の不等式を $r=1,\ldots,n$ について足し合わせると、$\sum_{r=1}^{n} r^5 < \frac{1}{6}n(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)(n+5)$ が得られ、示すべきことが示された。

小問 (ii)

今度は r^5 の下にある積がほしいので、因数を下にずらして $(r-4)(r-3)(r-2)(r-1)r$ を用いる。$Q(r)=(r-4)(r-3)(r-2)(r-1)r(r+1)$ とおくと、同じ因数分解により

$$Q(r)-Q(r-1) = (r-4)(r-3)(r-2)(r-1)r\big[(r+1)-(r-5)\big]$$
$$= 6\,(r-4)(r-3)(r-2)(r-1)r.$$

$r=0$ から $n-1$ まで和をとると、

$$\sum_{r=0}^{n-1}(r-4)(r-3)(r-2)(r-1)r = \tfrac{1}{6}\big[Q(n-1)-Q(-1)\big]$$
$$= \tfrac{1}{6}\,(n-5)(n-4)(n-3)(n-2)(n-1)n,$$

なぜなら $Q(-1)=(-5)(-4)(-3)(-2)(-1)\cdot 0=0$ だからである。

考えてみよう 和に現れるすべての r に対して、$(r-4)(r-3)(r-2)(r-1)r < r^5$ は成り立つだろうか？

そうとは限らない。ここで条件 $n>1$ が効いてくる。項ごとに比較する：

- $r=0$：両辺とも 0 なので、等号しか成り立たない。
- $r=1,2,3,4$：積は値 0 の因数を含むので、$0<r^5$ となる。
- $r\geq 5$：$k=1,2,3,4$ に対して各因数は $0<r-k<r$ を満たすので、積は $<r^5$ である。

したがって、すべての $r \geq 0$ に対して $(r-4)(r-3)(r-2)(r-1)r \leq r^5$ であり、$r \geq 1$ ではつねに狭義の不等号が成り立つ。$n > 1$ ならば、$r = 0$ から $n-1$ までの和は $r = 1$ の項を含むので、少なくとも一つの不等式は狭義であり、

$$\sum_{r=0}^{n-1} r^5 > \tfrac{1}{6}(n-5)(n-4)(n-3)(n-2)(n-1)n.$$

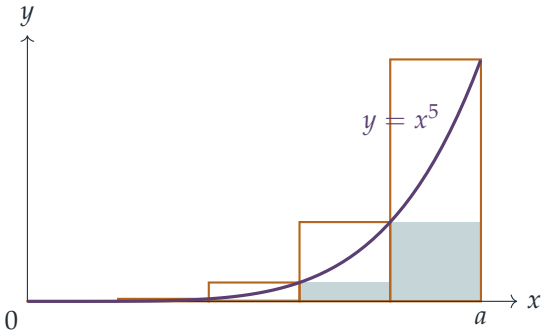
（$n = 1$ のときは両辺とも 0 となる。これが条件が必要な理由である。）

小問 (iii)

$\mathrm{f}(x) = x^5$ とおく。これは増加関数である。定義に現れる二つの和は

$$L_n = \sum_{r=0}^{n-1} \frac{a}{n}\left(\frac{ra}{n}\right)^5 = \frac{a^6}{n^6}\sum_{r=0}^{n-1} r^5, \qquad U_n = \sum_{r=1}^{n} \frac{a}{n}\left(\frac{ra}{n}\right)^5 = \frac{a^6}{n^6}\sum_{r=1}^{n} r^5.$$

$a > 0$ のとき、これらは曲線の下側と上側にある長方形の面積の和である：



（塗りつぶし部分：L_n、輪郭線：U_n。ここでは $n = 5$ である。）ただし、以下の計算に $a > 0$ は必要ない。任意の $a \neq 0$ に対して $a^6 > 0$ であり、$a = 0$ のときはすべての和が 0 となるので自明である。

L_n には小問 (ii)（$n > 1$ として）を、U_n には小問 (i) を用いると、

$$L_n > \frac{a^6}{6n^6}(n-5)(n-4)(n-3)(n-2)(n-1)n = \frac{a^6}{6}\prod_{k=1}^{5}\left(1-\frac{k}{n}\right),$$

$$U_n < \frac{a^6}{6n^6}n(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)(n+5) = \frac{a^6}{6}\prod_{k=1}^{5}\left(1+\frac{k}{n}\right).$$

また $U_n - L_n = \dfrac{a^6}{n^6}\left(n^5 - 0^5\right) = \dfrac{a^6}{n} > 0$ であるから、まとめると

$$\frac{a^6}{6}\prod_{k=1}^{5}\left(1-\frac{k}{n}\right) < L_n < U_n < \frac{a^6}{6}\prod_{k=1}^{5}\left(1+\frac{k}{n}\right).$$

$n \to \infty$ とすると各括弧は 1 に近づくので、外側の二つの評価はどちらも $\frac{1}{6}a^6$ に近づく。はさみうちの原理（squeeze (sandwich) theorem）により、L_n と U_n はともに収束（converge）し、その極限はともに $\frac{1}{6}a^6$ である。よって定義に現れる二つの極限はともに存在して等しく、したがって

$$\int_0^a x^5 \,\mathrm{d}x = \tfrac{1}{6}a^6.$$

検算

- (i) の小さな場合：$n = 1$ のとき $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 = 120 = \frac{1}{6} \cdot 720$、$n = 2$ のとき $120 + 720 = 840 = \frac{1}{6} \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7$。
- (i) と (ii) の恒等式、および二つの不等式は、200 までのすべての n で正確に成り立つ（コンピュータで確認した）。
- $a = 1$、$n = 1000$ のとき：$L_n \approx 0.166167$、$U_n \approx 0.167167$ であり、$\frac{1}{6} \approx 0.166667$ をはさんでいる。また $U_n - L_n = 0.001 = a^6/n$ である。

よくある間違い

- すべての $r \geq 0$ に対して $(r-4)\cdots r < r^5$ であると主張すること。$r = 0$ では等号となるので、狭義の不等式には $r = 1$ の項、すなわち $n > 1$ が必要である。
- L_n と U_n が有界であることだけ、あるいは $U_n - L_n \to 0$ であることだけを示すこと。定義では二つの極限がともに**存在する**ことが必要である。はさみうちの原理は、存在とその値を同時に与えてくれる。

STEP のその先へ

小問 (iii) は、リーマン（Riemann）積分（あるいはダルブー（Darboux）積分）を手を動かして体験するものである。関数が積分可能（integrable）であるとは、その下限和と上限和を互いに挟み込めることであり、単調（monotonic）な関数では、その差はつねに $(b-a)\,|\mathrm{f}(b) - \mathrm{f}(a)|/n$ となる。したがって、閉区間上の単調関数はすべて積分可能である。(i) と (ii) の積は「上昇階乗冪」と「下降階乗冪」（rising and falling factorial powers）であり、これを用いると差分法（calculus of finite differences）が通常の微分積分学とそっくりに見える。Abbott の *Understanding Analysis*（解析学入門書）は、この方法で積分を展開している。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。