解答例

STEP III 1989、第 1 問

純粋数学 ・ 回転面

> **STEP III 1989、問 1**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/89-s3-q1

鍵となる考え方

球面は半円の回転面（surface of revolution）であるから、球帯（zone）の面積は回転面の面積を求める標準的な積分で表される。意外なのは、被積分関数（integrand）が定数になることであり、まさにそのために答えは 2 平面間の距離だけで決まる。後半では、曲面は（OP から生じる）円錐（cone）と（弧 PR から生じる）球帯に分かれる。難しい部分は前半の結果が引き受けてくれ、接線（tangent）の条件から必要な直角三角形が得られる。

問題文に印刷された方程式について一言述べておく。右辺が c^2 のままだと円は O を通り、定数 a がまったく現れない。意図されている曲線は明らかに

$$(x-c)^2+y^2=a^2,$$

すなわち中心 $C=(c,0)$、半径 a の円である。$c>a$ であるから原点はこの円の外部にあり、O から接線を引くことができる。以下ではこの曲線について問題を解く。

解答

球帯の面積

半径 r、中心が原点の球を考え、x 軸を 2 平面に垂直にとる。2 平面を $x=h_1$ と $x=h_2$ $(-r\le h_1<h_2\le r)$ とする。球面は上半円 $y=\sqrt{r^2-x^2}$ を x 軸のまわりに 2π だけ回転させてできるので、球帯の面積は

$$S=\int_{h_1}^{h_2}2\pi y\sqrt{1+\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)^2}\,\mathrm{d}x.$$

ここで $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = -\dfrac{x}{\sqrt{r^2-x^2}}$ であるから、$|x| < r$ に対して

$$y\sqrt{1+\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)^2} = \sqrt{r^2-x^2}\sqrt{\frac{r^2-x^2+x^2}{r^2-x^2}} = \sqrt{r^2-x^2}\cdot\frac{r}{\sqrt{r^2-x^2}} = r.$$

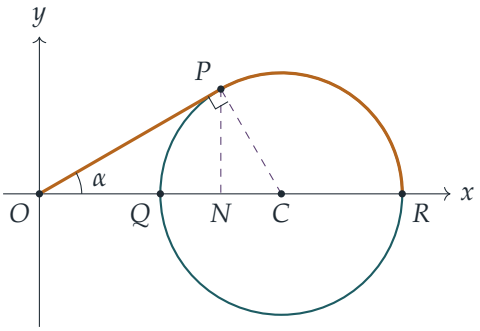
考えてみよう $\mathrm{d}y/\mathrm{d}x$ が無限大になる $x = \pm r$ では何が起こるか？

導関数は両極で発散するが、積 $y\sqrt{1+(y')^2}$ は $(-r, r)$ 全体で r に等しいので有界である。平面が球に接する場合（$h_1 = -r$ または $h_2 = r$）、積分は広義積分（improper integral）になるが、それは無害な形にすぎない。$h_2 - \varepsilon$ まで積分して $\varepsilon \to 0$ とすればよい。（あるいは $x = r\cos\theta$、$y = r\sin\theta$ と媒介変数表示すれば、この問題そのものを避けられる。）したがって

$$S = \int_{h_1}^{h_2} 2\pi r\,\mathrm{d}x = 2\pi r\,(h_2 - h_1),$$

これは $2\pi \times$ (半径) $\times$ (2 平面間の距離) であり、求める結果である。

曲面



中心を $C = (c, 0)$ とし、P から x 軸に下ろした垂線の足を N とする。このとき $Q = (c-a, 0)$、$R = (c+a, 0)$ である。弧 PR は Q を通らない方の弧（琥珀色で示したもの）である。P から R へのもう一方の弧は Q を通って円の下側を回っており、これを回転させると球面全体ができてしまう。

接線は接点における半径に垂直であるから、角 OPC は直角である。三角形 OPC において $OC = c$、$CP = a$ であるから、ピタゴラス（Pythagoras）の定理より

$$OP = \sqrt{c^2-a^2}.$$

角 POC を α とする。すると $\sin\alpha = \frac{a}{c}$、$\cos\alpha = \frac{\sqrt{c^2-a^2}}{c}$ であり、

$$PN = OP\sin\alpha = \frac{a\sqrt{c^2-a^2}}{c}, \qquad ON = OP\cos\alpha = \frac{c^2-a^2}{c}.$$

円錐。 OP を x 軸のまわりに回転させると、母線の長さ（slant height）$l = OP$、底面の半径 PN の円錐ができる。その側面積は $\pi \times$ (底面の半径) $\times$ (母線の長さ) であるから、

$$\pi \cdot \frac{a\sqrt{c^2-a^2}}{c} \cdot \sqrt{c^2-a^2} = \frac{\pi a(c^2-a^2)}{c}.$$

球帯。 弧 PR を回転させると、（中心 C、半径 a の）球面のうち、N を通り軸に垂直な平面と R における接平面とに挟まれた部分ができる。これら 2 平面の間の距離は

$$NR = (c+a) - \frac{c^2-a^2}{c} = \frac{ac+a^2}{c} = \frac{a(c+a)}{c}$$

であるから、前半の結果より球帯の面積は

$$2\pi a \cdot \frac{a(c+a)}{c} = \frac{2\pi a^2(c+a)}{c}.$$

合計。 2 つの部分を加えると

$$\begin{aligned} \text{面積} &= \frac{\pi a}{c}\left[(c^2-a^2) + 2a(c+a)\right] \\ &= \frac{\pi a}{c}(c^2+2ac+a^2) \\ &= \frac{\pi a(c+a)^2}{c}. \end{aligned}$$

検算

- $a = 1$、$c = 2$ とする。このとき $P = \left(\frac{3}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ であり、円錐の面積は $\frac{3\pi}{2}$、球帯の面積は 3π であるから、合計は $\frac{9\pi}{2} \approx 14.137$ となる。曲線を 20 000 本の短い線分で近似し、それによってできる円錐台（frustum）の面積を足し合わせると 14.13717 が得られる。
- $a \to c$ とすると、P は O に近づき、円錐は消える。曲面は半径 c の球面全体になり、実際 $\pi c(2c)^2/c = 4\pi c^2$ である。
- a を固定して $c \to \infty$ とすると、面積は πac のように増大する。これは母線の長さがおよそ c、底面の半径がおよそ a の細長い円錐の面積であり、予想どおりである。

よくある間違い

- 円錐の母線の長さとして OP ではなく OC や ON を用いてしまう。
- 球帯の厚さを、P から下ろした垂線の足 N からではなく、C や Q から測ってしまう。

- 公式 $2\pi rh$ を $r = a$ ではなく $r = c$ で用いてしまう。切り取られる球は C を中心とする半径 a の球であり、O を中心とするものではない。

STEP のその先へ

球帯についての結果はアルキメデス（Archimedes）の定理である。球面を外接する円柱へ水平に射影すると面積が保たれる。これがランベルト（Lambert）正積図法（equal-area map projection）の背後にある考え方である。また、球面上で一様に選んだ点の高さが一様分布に従う理由もこれで説明できる。回転面の面積は、大学 1 年次のベクトル解析の講義で学ぶ面積分（surface integral）$\iint |\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v| \, \mathrm{d}u \, \mathrm{d}v$ の最初の例である。曲率と曲面を見事に幾何学的に捉えた本として、Needham の *Visual Differential Geometry and Forms*（視覚的な微分幾何学と微分形式）を参照されたい。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。