解答例

STEP II 1989、第 9 問

純粋数学 ・ 行列の指数関数と連立系

> **STEP II 1989、問 9**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/89-s2-q9

鍵となる考え方

すべては一つの小さな計算にかかっている。$\mathbf{A}^2$ が単位行列（identity）になるのである。すると $\mathbf{A}$ の偶数乗はすべて $\mathbf{I}$、奇数乗はすべて $\mathbf{A}$ となるので、級数は指数関数の級数の偶数部分と奇数部分に分かれ、それぞれ $\cosh t$ と $\sinh t$ になる。微分方程式（differential equation）については、スカラーの場合の積分因子法（integrating-factor method）をそのまま真似て、行列 $\mathbf{F}$ に $\mathrm{e}^{\int a\,\mathrm{d}t}$ の役割を担わせればよい。

解答

行列 $\mathbf{F}$

積を計算すると、

$$\mathbf{A}^2 = \begin{pmatrix} -3 & -1 \\ 8 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -3 & -1 \\ 8 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9-8 & 3-3 \\ -24+24 & -8+9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \mathbf{I}.$$

したがって、すべての $k \geq 0$ に対して $\mathbf{A}^{2k} = (\mathbf{A}^2)^k = \mathbf{I}$、$\mathbf{A}^{2k+1} = \mathbf{A}^{2k}\mathbf{A} = \mathbf{A}$ である。$\mathbf{I} = \frac{t^0}{0!}\mathbf{A}^0$ と書き、級数を n が偶数の項と奇数の項に分けると（行列の級数の各成分は絶対収束（absolutely convergent）するスカラー級数の並べ替えなので、これは許される）、

$$\begin{aligned}\mathbf{F} &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^{2k}}{(2k)!}\mathbf{A}^{2k} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^{2k+1}}{(2k+1)!}\mathbf{A}^{2k+1} \\ &= \mathbf{I}\sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^{2k}}{(2k)!} + \mathbf{A}\sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^{2k+1}}{(2k+1)!} = \mathbf{I}\cosh t + \mathbf{A}\sinh t,\end{aligned}$$

となる。ここでマクローリン級数（Maclaurin series）$\cosh t = \sum t^{2k}/(2k)!$ および $\sinh t = \sum t^{2k+1}/(2k+1)!$ を用いた。これが求める形である。

逆行列

$\mathbf{G} = \mathbf{I}\cosh t - \mathbf{A}\sinh t$ とおく。$\mathbf{I}$ と $\mathbf{A}$ は可換（commute）なので、通常の数と同じように展開できる：

$$\mathbf{FG} = \mathbf{I}\cosh^2 t - \mathbf{A}^2\sinh^2 t + (\mathbf{A} - \mathbf{A})\cosh t \sinh t = \mathbf{I}(\cosh^2 t - \sinh^2 t) = \mathbf{I},$$

ここで $\mathbf{A}^2 = \mathbf{I}$ と $\cosh^2 t - \sinh^2 t = 1$ を用いた。同じ計算により $\mathbf{GF} = \mathbf{I}$ も得られるので、逆行列（inverse）は $\mathbf{F}^{-1} = \mathbf{I}\cosh t - \mathbf{A}\sinh t$ である。

導関数

成分ごとに微分すると（行列 $\mathbf{I}$ と $\mathbf{A}$ は定数である）、

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{F}}{\mathrm{d}t} = \mathbf{I}\sinh t + \mathbf{A}\cosh t, \qquad \text{一方} \qquad \mathbf{FA} = \mathbf{A}\cosh t + \mathbf{A}^2\sinh t = \mathbf{A}\cosh t + \mathbf{I}\sinh t.$$

両者は一致するので、$\dfrac{\mathrm{d}\mathbf{F}}{\mathrm{d}t} = \mathbf{FA}$ である。また、$\mathbf{F}$ は $\mathbf{I}$ と $\mathbf{A}$ から作られているので、$\mathbf{FA} = \mathbf{AF}$ が成り立つことにも注意しておく。

微分方程式

スカラーの方程式 $r' + ar = 0$ では、導関数が $\mathrm{e}^{at}a$ となる e^{at} を掛けて、左辺をちょうど一つの関数の導関数の形にする。行列 $\mathbf{F}$ はまさにこの性質 $\mathbf{F}' = \mathbf{FA}$ をもつので、方程式に $\mathbf{F}$ を**左から**掛ける：

$$\mathbf{F}\frac{\mathrm{d}\mathbf{r}}{\mathrm{d}t} + \mathbf{FAr} = \mathbf{0}.$$

積の微分法則（product rule）により（因数の順序を保つ限り、これは行列の積についても成り立つ）、

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\mathbf{Fr}) = \frac{\mathrm{d}\mathbf{F}}{\mathrm{d}t}\mathbf{r} + \mathbf{F}\frac{\mathrm{d}\mathbf{r}}{\mathrm{d}t} = \mathbf{FAr} + \mathbf{F}\frac{\mathrm{d}\mathbf{r}}{\mathrm{d}t},$$

であり、これはちょうど左辺に等しい。よって方程式は

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\mathbf{Fr}) = \mathbf{0},$$

を意味し、$\mathbf{Fr}$ は定ベクトル $\mathbf{c}$ である。

> ? **考えてみよう** なぜ右からではなく左から掛けるのか。また、$\mathbf{c}$ はどのように求めればよいか。

積 $\mathbf{rF}$ はそもそも定義されない（$\mathbf{r}$ は 2×1 の列ベクトルである）。また、積の微分法則から現れたのは $\mathbf{FAr}$ であり、これが項 $\mathbf{F}(\mathbf{Ar})$ と一致するのは $\mathbf{F}$ が左にあるときに限

る。定数を求めるには $t = 0$ とおけばよい。このとき $\cosh 0 = 1$、$\sinh 0 = 0$ なので $\mathbf{F} = \mathbf{I}$ となり、

$$\mathbf{c} = \mathbf{I}\,\mathbf{r}(0) = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}.$$

次に、$\mathbf{Fr} = \mathbf{c}$ に、上で求めた $\mathbf{F}^{-1}$ を左から掛ける：

$$\mathbf{r} = \mathbf{F}^{-1}\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \cosh t \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} - \sinh t \begin{pmatrix} -3 & -1 \\ 8 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \cosh t \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} - \sinh t \begin{pmatrix} -3\alpha - \beta \\ 8\alpha + 3\beta \end{pmatrix}.$$

成分を読み取ると、

$$x(t) = \alpha \cosh t + (3\alpha + \beta)\sinh t,$$
$$y(t) = \beta \cosh t - (8\alpha + 3\beta)\sinh t,$$

となり、求める結果が得られた。

検算

- $t = 0$ のとき、これらの式は当然そうなるべきとおり $x = \alpha$、$y = \beta$ を与える。
- 直接代入：$x' = \alpha \sinh t + (3\alpha + \beta)\cosh t$ であり、$-(-3x - y) = 3x + y = (3\alpha + \beta)\cosh t + \alpha \sinh t$ である（$9\alpha + 3\beta - 8\alpha - 3\beta = \alpha$ を用いた）。よって $x' = -(\text{第 1 成分：}\mathbf{Ar})$ であり、y についても同様である。
- 数値的にも、級数を 60 項まで足し合わせた結果は $\mathbf{I}\cosh t + \mathbf{A}\sinh t$ と一致し、$\alpha = 1$、$\beta = 0$ としてこの連立方程式をルンゲ＝クッタ法（Runge–Kutta method）で解くと $x(2) \approx 14.6428$ となって、$\cosh 2 + 3\sinh 2$ と一致する。

よくある間違い

- $\mathbf{F}$ を右から掛けてしまうこと。あるいは、ここでそれが許される理由（$\mathbf{F}$ は $\mathbf{I}$ と $\mathbf{A}$ の一次結合なので可換である）に触れずに、$\mathbf{AF}$ と $\mathbf{FA}$ を区別なく書いてしまうこと。
- 級数を分けるときに $\mathbf{I}$ の項（$n = 0$ の項）を忘れ、$\cosh t$ の定数項 1 を落としてしまうこと。
- $-\mathbf{A}$ を $(\alpha, \beta)^{\mathrm{T}}$ に掛けるときの符号の誤り。

STEP のその先へ

行列 $\mathbf{F}$ は行列指数関数（matrix exponential）$\mathrm{e}^{t\mathbf{A}}$ であり、ここでの方法は、$\mathbf{r}' = \mathbf{M}\mathbf{r}$ の解が常に $\mathbf{r} = \mathrm{e}^{t\mathbf{M}}\mathbf{r}(0)$ となることを示している。本問では $\mathbf{M} = -\mathbf{A}$ であり、答えに $\mathbf{F}^{-1} = \mathrm{e}^{-t\mathbf{A}}$ が現れるのはそのためである。一般には、$\mathbf{M}$ を対角化（diagonalisation）することで $\mathrm{e}^{t\mathbf{M}}$ を計算する。本問の $\mathbf{A}$ は固有値（eigenvalue）± 1 をもち（$\mathbf{A}^2 = \mathbf{I}$ が言っているのはまさにこのことである）、そこから $\mathrm{e}^{\pm t}$、ひいては cosh と sinh が現れるのである。Strang の *Introduction to Linear Algebra*（線形代数入門）には行列指数関数と連立微分方程式についての優れた章があり、Boyce と DiPrima の *Elementary Differential Equations*（微分方程式入門）は線形連立微分方程式を詳しく扱っている。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。