解答例

STEP II 1989、第 8 問

純粋数学 ・ 変換群

> **STEP II 1989、問 8**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/89-s2-q8

鍵となる考え方

すべては一つの恒等式 $\Omega^3 = -1$ に基づいている。これにより Ω は第 1 行の二次方程式を満たし、Ω の任意の累乗を Ω の一次式に帰着できる。R と T が 4 点をどのように入れ替えるかがわかれば、数え上げは式ではなく 4 点についての問題になる。群は z_0 を 4 点のどれにも移さなければならず、しかも z_0 を動かさない相異なる写像をすでに 3 つ含んでいる。最後の小問では、R と T がどのような種類の置換（permutation）であるかを考えるとよい。

解答

恒等式

$\Omega = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/3}$ であるから $\Omega^3 = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi} = -1$ であり、

$$0 = \Omega^3 + 1 = (\Omega + 1)(\Omega^2 - \Omega + 1).$$

$\Omega \neq -1$ であるから第 2 の因数が 0 となり、求める $\Omega^2 - \Omega + 1 = 0$ が得られる。

以下では、これを次の形で用いる。

$$\Omega^2 = \Omega - 1, \qquad \Omega^3 = -1, \qquad \Omega^4 = -\Omega.$$

また $2\Omega - 1 = 2\cos\frac{\pi}{3} - 1 + 2\mathrm{i}\sin\frac{\pi}{3} = \mathrm{i}\sqrt{3} \neq 0$ にも注意する。

R と T は 4 点を置換する

R について、$\Omega^2 = e^{2i\pi/3}$ を掛けることは 0 を中心とする 120° の回転である。

$$R(0) = 0, \qquad R(1) = \Omega^2, \qquad R(\Omega^2) = \Omega^4 = -\Omega, \qquad R(-\Omega) = -\Omega^3 = 1.$$

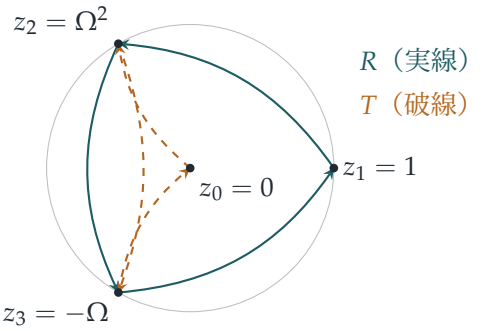
よって R は z_0 を固定し、$z_1 \to z_2 \to z_3 \to z_1$ と移す。

T について、各点を代入し $\Omega^2 = \Omega - 1$ を用いて簡単にする。

$$\begin{aligned} T(0) &= \frac{\Omega^2}{1} = z_2, \\ T(1) &= \frac{\Omega + \Omega^2}{2\Omega^2 + 1} = \frac{2\Omega - 1}{2\Omega - 1} = 1 = z_1, \\ T(\Omega^2) &= \frac{\Omega^3 + \Omega^2}{2\Omega^4 + 1} = \frac{\Omega - 2}{1 - 2\Omega} = -\Omega = z_3, \\ T(-\Omega) &= \frac{-\Omega^2 + \Omega^2}{-2\Omega^3 + 1} = \frac{0}{3} = 0 = z_0. \end{aligned}$$

3 行目では $\Omega^3 + \Omega^2 = -1 + (\Omega - 1) = \Omega - 2$ であり、最後の等号は $-\Omega(1 - 2\Omega) = -\Omega + 2\Omega^2 = -\Omega + 2\Omega - 2 = \Omega - 2$ から成り立つ。分母はすべて 0 でない（それぞれ 1、$i\sqrt{3}$、$-i\sqrt{3}$、3 である）。

よって T は z_1 を固定し、$z_0 \to z_2 \to z_3 \to z_0$ と移す。R と T はともに 4 点を置換し、いずれも 3-巡回置換（3-cycle）である。



群の位数は 12 以上である

R と T を含む最小の変換群（group）を G とする。すなわち、R、T およびそれらの逆変換を合成して作れるもの全体である。R と T は集合 $\{z_0, z_1, z_2, z_3\}$ をそれ自身の上に写す（その逆変換も、この有限集合の全単射（bijection）の逆であるから同様である）ので、G のすべての元はこの集合をそれ自身の上に写す。

z_0 を固定する 3 つの写像。 集合 $H = \{I, R, R^2\}$ は G に含まれ、その元はすべて z_0 を固定し、3 つは相異なる変換である（0°、120°、240° の回転）。

z_0 をあらゆる点に移す写像。上で求めた巡回を用いると、

$$g_0 = I, \qquad g_1 = R^2T, \qquad g_2 = T, \qquad g_3 = RT$$

は $g_k(z_0) = z_k$ を満たす。たとえば $RT(z_0) = R(z_2) = z_3$、$R^2T(z_0) = R^2(z_2) = R(z_3) = z_1$ である。

ここで、$k \in \{0,1,2,3\}$、$h \in H$ に対する 12 個の積 g_kh を考える。$h(z_0) = z_0$ であるから $g_kh(z_0) = z_k$ となる。

考えてみよう この 12 個の積のうち、2 つが同じ変換になることはあり得るだろうか？

あり得ない。$g_kh = g_lh'$ ならば、両辺を z_0 に施すと $z_k = z_l$ となるので $k = l$ である。次に左から g_k^{-1} を合成すると $h = h'$ を得る。したがって 12 個の積は G の相異なる元であり、$|G| \geq 12$ である。（群論の言葉でいえば、z_0 の軌道（orbit）の大きさは 4、その固定部分群（stabiliser）の大きさは 3 以上であるから、軌道・固定部分群定理（orbit–stabiliser theorem）により $|G| \geq 4 \times 3$ である。）

最後の小問

答えは「はい」である。4 点の 24 個の置換のうち、ちょうど半分は決して作ることができない。

考えてみよう 置換として見たとき、R と T にはどのような共通点があるだろうか？

どちらも 3-巡回置換であり、3-巡回置換は**偶置換**（even permutation）である。たとえば $(z_1\,z_2\,z_3) = (z_1\,z_3)(z_1\,z_2)$ は 2 つの互換（transposition）の積である。それらの逆変換も 3-巡回置換である。偶置換の合成は偶置換であるから、R と T から得られる点の置換はすべて偶置換である。4 個のものの偶置換は 12 個しかないので、残りの 12 個、すなわち奇置換は決して得られない。たとえば、z_2 と z_3 を固定したまま z_0 と z_1 を入れ替える置換は 1 つの互換であるから奇置換であり、得ることはできない。

実は、前の小問と合わせると G が完全に決定できる。R と T はメビウス変換（Möbius map）であり（T については $ad - bc = \Omega - 2\Omega^4 = 3\Omega \neq 0$）、3 点を固定するメビウス変換は恒等変換であるから、G の各元は 4 点をどう置換するかによって決まる。よって $|G| \leq 12$ であり、前の小問と合わせて $|G| = 12$ となる。G はこれらの点に偶置換全体のなす群、すなわち A_4 として作用する。

検算

- 数値的に $|\Omega^2 - \Omega + 1| \approx 2 \times 10^{-16}$ であり、4 点で R と T の値を計算すると、上の 2 つの 3-巡回置換がそのまま得られる。
- $R^3 = I$ は明らかである。また、3-巡回置換であるべきとおり $T^3 = I$ も成り立つ（ランダムな点で 10^{-16} の精度で確認した）。
- R と T のあらゆる合成を計算機で生成すると、相異なる写像がちょうど 12 個得られ、いずれも偶置換を引き起こし、z_0 は 4 点すべてに移され、z_0 を固定する写像は 3 個である。

よくある間違い

- 「G は位数 3 の元を含むから $|G| \geq 12$ である」と論じること。位数 3 の元だけからは 3 が $|G|$ を割り切ることしかわからない。因数 4 をもたらすのは、4 点への推移性（transitivity）である。
- Ω の累乗を簡単にしないまま放置し、$T(\Omega^2) = -\Omega$ が誤りに見えてしまうこと。まずすべてを $a + b\Omega$ の形に帰着させること。

STEP のその先へ

$|G| =$ (軌道の大きさ) $\times$ (固定部分群の大きさ) という数え上げは軌道・固定部分群定理であり、偶置換全体は交代群（alternating group）A_4 をなす。これは正四面体（regular tetrahedron）の回転群でもある。ここでこのことが起こるのには美しい理由がある。メビウス変換は 4 点の複比（cross-ratio）を保ち、これら 4 点の複比は $\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\pi/3}$ である。これは特別な「等非調和（equianharmonic）」の値で、この値を保つのはちょうど偶置換だけなのである。群と群作用については Allenby, *Rings, Fields and Groups*（環・体・群）を、メビウス変換とリーマン球面（Riemann sphere）については Needham, *Visual Complex Analysis*（目で見る複素解析）を参照されたい。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。