解答例

STEP II 1989、第 7 問

純粋数学 • 2 階の微分方程式

> **STEP II 1989、問 7**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/89-s2-q7

鍵となる考え方

項 $x\,y''$ と $-b\,y'$ は組み合わせが扱いにくく見えるが、独立変数の変換（change of independent variable）$t = x^{\alpha}$ を行うと、y'' から 1 階導関数の項が現れ、これを $-b\,y'$ とちょうど打ち消し合うようにできる。そのように α を選ぶと、t についての単振動（simple harmonic motion）の方程式が残る。その後、$x \to 0$ のときの振る舞いは $\mathrm{d}y/\mathrm{d}x$ に含まれる因子 x^{b} の振る舞いに帰着し、それは b の符号によって決まる。

解答

変数の変換

α は後で選ぶことにして $t = x^{\alpha}$ とおき、y を t の関数とみなす。$\dot{y} = \mathrm{d}y/\mathrm{d}t$ とすると、合成関数の微分法（chain rule）により

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \alpha x^{\alpha-1}\dot{y},$$
$$\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2} = \alpha(\alpha-1)x^{\alpha-2}\dot{y} + \alpha^2 x^{2\alpha-2}\ddot{y},$$

となる。ここで 2 行目では積の微分法（product rule）と $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\dot{y} = \alpha x^{\alpha-1}\ddot{y}$ を用いた。代入すると

$$x\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2} - b\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \alpha^2 x^{2\alpha-1}\ddot{y} + \alpha(\alpha-1-b)\,x^{\alpha-1}\dot{y}.$$

$\alpha = b+1$ と選べば $\dot{y}$ の項は消える。$b > -1$ であるから、この α は 0 でない。このとき $2\alpha - 1 = 2b+1$ であるから、方程式は

$$(b+1)^2 x^{2b+1}\ddot{y} + x^{2b+1}y = 0 \quad\Longrightarrow\quad \ddot{y} + \frac{y}{(b+1)^2} = 0,$$

となる。ここで $x^{2b+1} \neq 0$ で割った（$x > 0$ である）。これは t についての角振動数 $1/(b+1)$ の単振動であるから、

$$\boxed{y = A\cos\left(\frac{x^{b+1}}{b+1}\right) + B\sin\left(\frac{x^{b+1}}{b+1}\right)}$$

である。ただし A, B は任意定数である。2 階の方程式に対して定数が 2 つあるので、これが一般解（general solution）である。

$x \to 0$ のときの振る舞い

$u = x^{b+1}/(b+1)$ とおく。$b+1 > 0$ であるから、$x \to 0^+$ のとき $u \to 0^+$ であり、

$$y \to A\cos 0 + B\sin 0 = A.$$

したがって $y \to 1$ より $A = 1$ でなければならない。$\mathrm{d}u/\mathrm{d}x = x^b$ を用いて微分すると

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = x^b(-\sin u + B\cos u) \qquad (A = 1).$$

$b > 0$ の場合。このとき $x^b \to 0$ であり、括弧の中は有限の値 B に近づく。よって **B の値にかかわらず** $\mathrm{d}y/\mathrm{d}x \to 0$ である。解の族

$$y = \cos\left(\frac{x^{b+1}}{b+1}\right) + B\sin\left(\frac{x^{b+1}}{b+1}\right), \qquad B \in \mathbb{R},$$

のどの解も両方の条件を満たす。解は存在するが、一意ではない。これが示すべきことであった。

> **考えてみよう** 通常の 2 階の方程式では、y の値と y' の値を 1 つずつ与えれば解が定まる。ここではなぜそれが成り立たないのか。

一意性定理（uniqueness theorem）は、方程式が $y'' = f(x, y, y')$ の形で、f が性質のよい関数であることを必要とする。x で割ると $y'' = (b/x)\,y' - x^{2b}y$ となり、係数 b/x は $x = 0$ で発散する。点 $x = 0$ は**特異点**（singular point）であり、通常の保証はそこでは適用されない。

$b = 0$ の場合。このとき $x^b = 1$ であり、$\mathrm{d}y/\mathrm{d}x \to B$ となる。条件より $B = 0$ でなければならず、一意的な解 $y = \cos x$ が得られる。（これは単に $y'' + y = 0$ である。）

$-1 < b < 0$ の場合。このとき $x^b \to \infty$ である。$B \neq 0$ ならば $Bx^b\cos u \to \pm\infty$ となる一方、もう一方の項は小さい。実際、$\sin u \leq u$ であるから

$$|x^b \sin u| \leq x^b \cdot \frac{x^{b+1}}{b+1} = \frac{x^{2b+1}}{b+1}.$$

より正確には $\sin u/u \to 1$ であるから、$x^b \sin u \sim x^{2b+1}/(b+1)$ である。よって $B=0$ でなければならず、このとき

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = -x^b \sin u \sim -\frac{x^{2b+1}}{b+1}.$$

これが 0 に近づくのは $2b+1>0$、すなわち $b>-\frac{1}{2}$ のとき、かつそのときに限る。$b=-\frac{1}{2}$ のときは -2 に近づき、$b<-\frac{1}{2}$ のときは有界でない。したがって $-\frac{1}{2}<b<0$ のときは解がただ 1 つ $y=\cos(x^{b+1}/(b+1))$ だけ存在し、$-1<b\le -\frac{1}{2}$ のときは解は存在しない。

結論

条件が一意的な解を定めるのは、ちょうど

$$-\tfrac{1}{2} < b \le 0,$$

のときであり、その解は $y=\cos(x^{b+1}/(b+1))$ である。



検算

- $b=0$ のとき $y''+y=0$ となり、その解 $A\cos x + B\sin x$ は公式と一致する。
- 数値的にも、一般解は丸め誤差の範囲で方程式を満たす（無作為に選んだ x, b, A, B における差分近似による）。$b=-\frac{1}{4}, B=0$ のとき、$x=10^{-9}$ で $y' \approx -4.2\times 10^{-5}$ となり、0 に近づいていく。$b=-\frac{1}{2}$ のときは値は -2 のままであり、$b=1, B=5$ のときは $x=10^{-9}$ で 5×10^{-9} である。

よくある間違い

- 「$b\le 0$ ならば一意」で止めてしまうこと。$-1<b\le -\frac{1}{2}$ のときは余弦の解でさえ $y' \not\to 0$ であり、解はまったく存在しない。
- $\alpha x^{\alpha-1}\dot{y}$ を x で微分するときに積の微分法を忘れること。そこで現れる余分な項こそが、$-by'$ を打ち消すものである。

STEP のその先へ

点 $x = 0$ はこの方程式の**確定特異点**（regular singular point）である。このような点の近くでは、フロベニウス（Frobenius）の方法により $x^r \sum c_n x^n$ の形の解を探す。ここでの決定方程式（indicial equation）の根は $r = 0$ と $r = b + 1$ である。特異点におけるどのような条件で解が定まるかは、まさに上で見たとおり、これらの指数によって決まる。Boyce and DiPrima, *Elementary Differential Equations*（微分方程式の入門書）は、級数解と確定特異点を扱っている。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。