解答例

STEP II 1989、第 6 問

純粋数学 • 逆関数の積分

> **STEP II 1989、問 6**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/89-s2-q6

鍵となる考え方

右辺には g の y に関する積分が含まれているので、左辺の積分を $y = \mathrm{f}(x)$ を用いて書き直す、すなわち $x = \mathrm{g}(y)$ と置換する（substitution）のが自然な方針である。新しい被積分関数には $y\,\mathrm{g}'(y)$ が現れる。これはまさに部分積分（integration by parts）を求めている形であり、境界項から長方形が生じる。第二の公式もまったく同様にして得られる。x を $x^2/2$ に、面積を y 軸のまわりの回転体の体積（volume of revolution）に置き換えればよい。

解答

第一の公式

$[a, b]$ 上で $\mathrm{f}'(x) > 0$ であるから、f はそこで狭義単調増加（strictly increasing）である。したがって f は $[a, b]$ から $[\alpha, \beta]$ への全単射（bijection）であり、逆関数（inverse function）$\mathrm{g}\colon [\alpha, \beta] \to [a, b]$ が存在する。さらに g は微分可能であり、

$$\mathrm{g}'(y) = \frac{1}{\mathrm{f}'(\mathrm{g}(y))},$$

が成り立つ。f' は一度も 0 にならないので、この式は意味をもつ。

$x = \mathrm{g}(y)$ と置換すると、$\mathrm{f}(x) = y$ かつ $\mathrm{d}x = \mathrm{g}'(y)\,\mathrm{d}y$ である。$x = a$ のとき $y = \mathrm{f}(a) = \alpha$ であり、$x = b$ のとき $y = \beta$ である。よって

$$\int_a^b \mathrm{f}(x)\,\mathrm{d}x = \int_\alpha^\beta y\,\mathrm{g}'(y)\,\mathrm{d}y.$$

次に $u = y$、$\mathrm{d}v = \mathrm{g}'(y)\,\mathrm{d}y$ として部分積分を行う。このとき $v = \mathrm{g}(y)$ である：

$$\begin{aligned}\int_\alpha^\beta y\,\mathrm{g}'(y)\,\mathrm{d}y &= \Big[y\,\mathrm{g}(y)\Big]_\alpha^\beta - \int_\alpha^\beta \mathrm{g}(y)\,\mathrm{d}y \\ &= \beta\,\mathrm{g}(\beta) - \alpha\,\mathrm{g}(\alpha) - \int_\alpha^\beta \mathrm{g}(y)\,\mathrm{d}y \\ &= b\beta - a\alpha - \int_\alpha^\beta \mathrm{g}(y)\,\mathrm{d}y,\end{aligned}$$

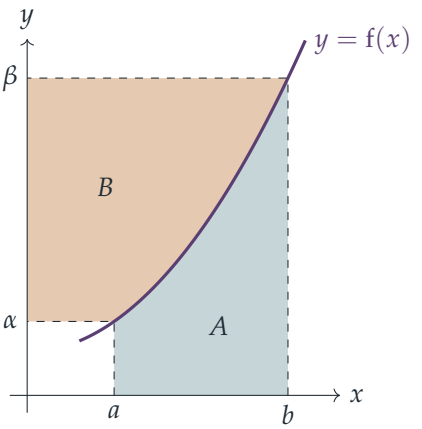
ここで $\mathrm{g}(\beta) = b$ および $\mathrm{g}(\alpha) = a$ を用いた。これが求める公式である。

幾何学的な意味

$a > 0$ かつ $\alpha > 0$ とする。f は増加関数なので $0 < a < b$ かつ $0 < \alpha < \beta$ であり、(a, α) から (b, β) までの $y = \mathrm{f}(x)$ の弧は第 1 象限にある。公式を次のように書き直す。

$$\underbrace{\int_a^b \mathrm{f}(x)\,\mathrm{d}x}_{\text{面積}A} + \underbrace{\int_\alpha^\beta \mathrm{g}(y)\,\mathrm{d}y}_{\text{面積}B} = b\beta - a\alpha.$$

ここで A は $a \le x \le b$ の範囲で曲線と x 軸に挟まれた部分の面積であり、B は $\alpha \le y \le \beta$ の範囲で曲線と y 軸に挟まれた部分の面積である（曲線を横から見て $x = \mathrm{g}(y)$ とみなしている）。両者を合わせると、長方形 $[0, b] \times [0, \beta]$ から小さい長方形 $[0, a] \times [0, \alpha]$ を取り除いた領域をちょうど埋め尽くす。この L 字型の領域の面積は $b\beta - a\alpha$ である。



第二の公式

同じ置換 $x = \mathrm{g}(y)$、$\mathrm{d}x = \mathrm{g}'(y)\,\mathrm{d}y$ を用いると

$$2\pi \int_a^b x\,\mathrm{f}(x)\,\mathrm{d}x = 2\pi \int_\alpha^\beta y\,\mathrm{g}(y)\,\mathrm{g}'(y)\,\mathrm{d}y.$$

考えてみよう 今度はどの因子を積分すべきだろうか？

連鎖律（chain rule）により、$g(y)\,g'(y)$ は $\frac{1}{2}[g(y)]^2$ の導関数であることに注意する。そこで $u = y$、$v = \frac{1}{2}[g(y)]^2$ として部分積分を行う：

$$2\pi \int_\alpha^\beta y\,g(y)\,g'(y)\,dy = 2\pi \left(\left[\tfrac{1}{2} y\,[g(y)]^2\right]_\alpha^\beta - \int_\alpha^\beta \tfrac{1}{2}[g(y)]^2\,dy \right)$$
$$= \pi(\beta b^2 - \alpha a^2) - \pi \int_\alpha^\beta [g(y)]^2\,dy,$$

ここでも $g(\beta) = b$ と $g(\alpha) = a$ を用いた。これが第二の公式である。

第二の公式の幾何学的な意味

再び $a > 0$、$\alpha > 0$ とし、上の図を y 軸のまわりに 1 回転させる。

- 領域 A が描く立体の体積は、円筒殻法（method of cylindrical shells）により $2\pi \int_a^b x\,f(x)\,dx$ である。実際、軸から距離 x の位置にある高さ $f(x)$、幅 dx の細い帯は、体積がおよそ $2\pi x\,f(x)\,dx$ の円筒殻になる。
- 領域 B が描く立体の体積は、円板法（disc method）により $\pi \int_\alpha^\beta [g(y)]^2\,dy$ である。実際、高さ y にある帯は半径 $g(y)$ の円板になる。
- 2 つの立体を合わせると、半径 b、高さ β の円柱から、その底面側にある半径 a、高さ α の同軸の円柱を取り除いた立体をちょうど埋め尽くす。その体積は $\pi b^2\beta - \pi a^2\alpha$ である。

つまりこの公式は、円筒殻による体積と円板による体積の和が、2 つの円柱の体積の差に等しいことを述べている。条件 $a > 0$ と $\alpha > 0$ により、2 つの領域はともに軸の一方の側にあり、かつ x 軸より上にあることが保証される。そのため、積分は確かに体積を表し、2 つの立体は重ならない。

検算

$[1,2]$ 上で $f(x) = x^2$ を試す。このとき $\alpha = 1$、$\beta = 4$、$g(y) = \sqrt{y}$ である。第一の公式では、左辺は $\frac{7}{3}$、右辺は $8 - 1 - \frac{2}{3}(8-1) = \frac{7}{3}$ となる。第二の公式では、左辺は $2\pi \cdot \frac{15}{4} = \frac{15\pi}{2}$、右辺は $\pi(16-1) - \pi \cdot \frac{15}{2} = \frac{15\pi}{2}$ となる。また、g を二分法（bisection）で求めたうえで、シンプソンの公式（Simpson's rule）により両方の公式を数値的にも確かめた。対象としたいくつかの関数のなかには $[\frac{1}{2},2]$ 上の $x^3 + x$ も含まれ、このとき第一の公式の両辺はともに 5.859375 となる。

よくある間違い

- 積分区間の変更を忘れる。$x = g(y)$ と置換したあとの積分区間は α と β であり、a と b ではない。
- g が存在して微分可能である理由を述べない。条件 $f' > 0$ はまさにそのためにある。
- 領域 B を曲線の下にある領域だと説明してしまう。実際には曲線と y 軸の間にある。

STEP のその先へ

第一の公式は、f と f^{-1} のグラフが $y = x$ に関して互いに対称であるという事実の積分版である。これはヤングの不等式（Young's inequality）の背後にある考え方である。すなわち、$f(0) = 0$ を満たす増加関数 f と $a, b \geq 0$ に対して $ab \leq \int_0^a f + \int_0^b f^{-1}$ が成り立つ。またこれは、凸解析（convex analysis）やハミルトン力学（Hamiltonian mechanics）で用いられるルジャンドル変換（Legendre transform）の背後にある考え方でもある。さらに、arcsin や ln のような逆関数の積分を、巧妙な置換を使わずに求める方法もこれである。置換積分と逆関数の丁寧な扱いについては、Abbott, *Understanding Analysis* を参照せよ。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。