解答例

STEP II 1989、第 5 問

純粋数学 • 極方程式の曲線と反射

> **STEP II 1989、問 5**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/89-s2-q5

鍵となる考え方

小問 (i) は、$x = r\cos\theta, y = r\sin\theta$ として $\mathrm{d}y/\mathrm{d}x = (\mathrm{d}y/\mathrm{d}\theta)/(\mathrm{d}x/\mathrm{d}\theta)$ を計算するだけである。鏡については、O を中心とする極座標（polar coordinates）を用いるのが自然である。反射光線はつねに動径に沿って極へ戻ってくるからである。すると反射の法則（law of reflection）により、各点における法線（normal）の向きが θ だけで表される。それを小問 (i) によって $r(\theta)$ に関する 1 階の微分方程式（differential equation）に書き直すと、変数分離形（separable）になる。

解答

小問 (i)

極座標が (r,θ) である点の直交座標は $x = r\cos\theta, y = r\sin\theta$ である。曲線 $r = r(\theta)$ 上では、これらはどちらも θ の関数であり、積の微分法（product rule）により

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}\theta} = \frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\theta}\cos\theta - r\sin\theta, \qquad \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}\theta} = \frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\theta}\sin\theta + r\cos\theta.$$

となる。$\mathrm{d}x/\mathrm{d}\theta \neq 0$ であるところでは、（媒介変数表示された曲線に対する）連鎖律（chain rule）により

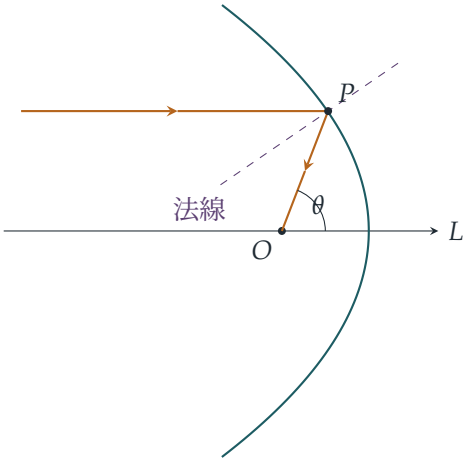
$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}y/\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}x/\mathrm{d}\theta} = \frac{\dfrac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\theta}\sin\theta + r\cos\theta}{\dfrac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\theta}\cos\theta - r\sin\theta} = \frac{\dfrac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\theta}\tan\theta + r}{\dfrac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\theta} - r\tan\theta},$$

である。最後の等号では分母と分子を $\cos\theta$ で割った。これは $\cos\theta \neq 0$ であれば許される。以上が求める公式である。

小問 (ii)

平面曲線への帰着。 L を含む任意の平面 Π と、Π 上にある鏡の点 P をとる。P を通り L に平行な光線は Π 上にあり、O も同様である。したがって反射光線 PO も Π 上にある。P における法線は Π 上の 2 直線のなす角を二等分するから、これも Π 上にある。鏡と Π の交わりである曲線 C の P における接線（tangent）は、Π と鏡の接平面の両方に含まれるので、法線に垂直である。よって平面 Π 内で、C の P における法線は入射光線と反射光線のなす角を二等分する。こうして問題は 2 次元の問題になる。

座標。 Π において、O を極とし、L に沿う始線をもつ極座標を用いる。向きは、入射光線が $\theta = 0$ の方向に進むように定める（図のように、光線は鏡の開口部の向こう側から L に沿ってやってくる）。$P = (r, \theta)$ を C 上の点とする。



法線の向き。 P から見ると、入射光線は $(-1, 0)$ の方向へ戻り、反射光線は $(-\cos\theta, -\sin\theta)$ の方向へ O に向かう。どちらも単位ベクトルであるから、その和はこの 2 つのなす角の二等分線（bisector）、すなわち法線の方向を向く。

$$(-1 - \cos\theta, -\sin\theta) = -2\cos\tfrac{\theta}{2}\,(\cos\tfrac{\theta}{2}, \sin\tfrac{\theta}{2}),$$

ここで $1 + \cos\theta = 2\cos^2\frac{\theta}{2}$ と $\sin\theta = 2\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}$ を用いた。したがって P における法線は L と角 $\frac{\theta}{2}$ をなし、接線はそれに垂直であるから、P における C の傾きは

$$m = -\cot\tfrac{\theta}{2}.$$

である。

微分方程式。 $r' = \mathrm{d}r/\mathrm{d}\theta$, $t = \tan\theta$, $\tau = \tan\frac{\theta}{2}$ とおくと、$t = \dfrac{2\tau}{1-\tau^2}$ かつ $m = -\dfrac{1}{\tau}$ である。小問 (i) により

$$\frac{r't + r}{r' - rt} = m \quad\Longrightarrow\quad r'(t - m) = -r(1 + mt) \quad\Longrightarrow\quad \frac{r'}{r} = -\frac{1 + mt}{t - m}.$$

ここで

$$1+mt = 1-\frac{2}{1-\tau^2} = -\frac{1+\tau^2}{1-\tau^2}, \qquad t-m = \frac{2\tau}{1-\tau^2}+\frac{1}{\tau} = \frac{1+\tau^2}{\tau(1-\tau^2)},$$

であるから、

$$\frac{1}{r}\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\theta} = \tan\tfrac{\theta}{2}.$$

を得る。

考えてみよう 小問 (i) の式は $\cos\theta = 0$ のところで使えなくなる。これによって議論に穴が生じないだろうか。

生じない。方程式 $r'/r = \tan\frac{\theta}{2}$ に現れるのは $-\pi < \theta < \pi$ 上で連続な θ の関数だけである。この式は、孤立した値 $\theta = \pm\frac{\pi}{2}$（および接線が鉛直になる孤立点）を除くすべての点で成り立つので、r' の連続性により、それらの点でも成り立つ。（別の方法として、動径と接線のなす角 ψ は $\tan\psi = r/r'$ を満たし、幾何的な考察から直接 $\psi = \frac{\pi}{2} - \frac{\theta}{2}$ が得られる。こちらには例外点がない。）

解く。 $-\pi < \theta < \pi$ において $\cos\frac{\theta}{2} > 0$ であることに注意して積分すると、

$$\ln r = \int \tan\tfrac{\theta}{2}\,\mathrm{d}\theta = -2\ln\cos\tfrac{\theta}{2} + \text{定数}, \qquad \text{よって} \qquad r = \frac{k}{\cos^2\frac{\theta}{2}} = \frac{2k}{1+\cos\theta}$$

となる。ここで $k > 0$ は定数である（$r > 0$ だから）。$\ell = 2k$ とおく。すると $r + r\cos\theta = \ell$、すなわち $r = \ell - x$ である。$r^2 = x^2 + y^2$ を用いて両辺を 2 乗すると

$$x^2 + y^2 = (\ell - x)^2 \quad \Longleftrightarrow \quad y^2 = \ell^2 - 2\ell x.$$

これは軸が L、焦点（focus）が O の放物線（parabola）である（$X = \frac{\ell}{2} - x, a = \frac{\ell}{2}$ とすると $Y^2 = 4aX$ の形であり、焦点は $x = \frac{\ell}{2} - a = 0$ にある）。Π は L を含む任意の平面であったから、鏡はそのようなすべての平面と放物線で交わる。これが示すべきことであった。（実際には、定数 ℓ がどの平面でも同じになるのは、鏡が 1 つの回転放物面（paraboloid of revolution）である場合に限られる。ただし、この問題ではそこまでは必要ない。）

検算

- $\theta = 0$ のとき $r = \frac{\ell}{2}$ となる。すなわち頂点（vertex）は O と準線（directrix）$x = \ell$ のちょうど中間にあり、焦点が O の放物線として正しい。
- $\ell = 2, \theta = \frac{\pi}{2}$ のとき点は $P = (0,2)$ であり、そこでの $y^2 = 4 - 4x$ の傾きは $-1 = -\cot\frac{\pi}{4}$ である。方向 $(1,0)$ をこの接線に関して反射すると $(0,-1)$ となり、まっすぐ下の O に向かう。

- 数値的な確認：(i) の傾きの公式は、2000 本のランダムな曲線について有限差分と（10^{-8} の精度で）一致した。$r(0) = 1.35$ から出発して $r' = r\tan\frac{\theta}{2}$ をルンゲ＝クッタ法（Runge–Kutta method）で解くと $r(2.5) = 13.5776380$ となり、$2.7/(1+\cos 2.5)$ と一致した。また、L に平行な光線を $y^2 = \ell^2 - 2\ell x$ で反射させると、ランダムに選んだ 1000 点のすべてで光線は O を通った。

よくある間違い

- 二等分線を取り違えること。光線に沿って P から**離れる**向きの 2 つの単位ベクトルの和が法線を与え、その差は接線を与える。
- 問題が平面の問題になる理由の説明を忘れること。L を通る平面は入射光線と O を含み、したがって反射光線と法線も含む。
- 積分定数を付けずに $\ln r = -2\ln\cos\frac{\theta}{2}$ と書くこと。これでは放物線の族全体が失われてしまう。

STEP のその先へ

方程式 $r(1+\cos\theta) = \ell$ は、焦点を極とし離心率（eccentricity）が 1 である円錐曲線（conic）の極方程式である。1 を e に置き換えると楕円（ellipse）や双曲線（hyperbola）が得られる。これはまさに、ニュートン（Newton）の運動方程式を極座標で解いたときに惑星の軌道が現れる形である。また、この反射の議論は、衛星放送用のパラボラアンテナや自動車のヘッドライトが回転放物面になっている理由でもある。Kleppner と Kolenkow の *An Introduction to Mechanics*（力学入門）では、この方法で円錐曲線の軌道を導いている。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。