解答例

# STEP II 1989、第 4 問

純粋数学 ・ 分数関数のグラフ

> **STEP II 1989、問 4**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/89-s2-q4

## 鍵となる考え方

一次式の積や商は、対数微分（logarithmic differentiation）を用いるのが最も簡単である。対数をとると積が和に変わるからである。値域（range）については、問いを逆向きに考える。すなわち、どのような $z$ に対して $\mathrm{f}(x) = z$ が実数解をもつか、を問うのである。この方程式は $x$ についての二次方程式であるから、答えは判別式（discriminant）から得られる。グラフの概形は、零点（zeros）、極（poles）、$|x|$ が大きいときの振る舞い、そして取らない $z$ の値があるかどうかから描ける。

問題文について一言注意しておく。条件 $a+d \neq c+d$ は $a \neq c$ を述べているにすぎず、これはすでにわかっている。実際に用いる条件は $a+b \neq c+d$ であり、以下ではこれを常に仮定する。

## 解答

### 導関数

$\mathrm{f}(x) \neq 0$ となるところ、すなわち $x \neq a, b$（かつ $x \neq c, d$）では、絶対値の対数をとることができる：

$$\ln|\mathrm{f}(x)| = \ln|x-a| + \ln|x-b| - \ln|x-c| - \ln|x-d|.$$

これを微分し、$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\ln|x-k| = \frac{1}{x-k}$ を用いると、

$$\frac{\mathrm{f}'(x)}{\mathrm{f}(x)} = \frac{1}{x-a} + \frac{1}{x-b} - \frac{1}{x-c} - \frac{1}{x-d}.$$

ここで両辺に $x$ を掛ける。$x \neq 0$ のとき各項は

$$\frac{x}{x-k} = \frac{1}{1-k/x} = \left(1-\frac{k}{x}\right)^{-1},$$

となり、求める恒等式

$$\frac{x\,\mathrm{f}'(x)}{\mathrm{f}(x)} = \left(1-\frac{a}{x}\right)^{-1} + \left(1-\frac{b}{x}\right)^{-1} - \left(1-\frac{c}{x}\right)^{-1} - \left(1-\frac{d}{x}\right)^{-1}.$$

が得られる。

### $|x|$ が大きいとき

$|x|$ が $|k|$ よりはるかに大きいとき、二項展開（binomial expansion）により $(1-k/x)^{-1} = 1 + \frac{k}{x} + O\left(\frac{1}{x^2}\right)$ である。先頭の 4 つの 1 は打ち消し合い（$1+1-1-1=0$）、

$$\frac{x\,\mathrm{f}'(x)}{\mathrm{f}(x)} = \frac{a+b-c-d}{x} + O\left(\frac{1}{x^2}\right), \qquad \text{よって} \qquad \mathrm{f}'(x) = \frac{\mathrm{f}(x)}{x^2}\left[(a+b-c-d) + O\left(\tfrac{1}{x}\right)\right].$$

が残る。$a+b-c-d \neq 0$ であるから、$|x|$ が十分大きければ括弧内は $a+b-c-d$ と同じ符号をもつ。また $|x| \to \infty$ のとき $\mathrm{f}(x) \to 1$ であるから、そこでは $\mathrm{f}(x) > 0$ であり、さらに $x^2 > 0$ である。したがって、$|x|$ が大きいとき、実数直線の両端のいずれにおいても $\mathrm{f}'(x)$ は $a+b-c-d$ と同じ符号をもつ。

曲線が漸近線（asymptote）$y = 1$ のどちら側にあるかも記録しておく価値がある。直接計算すると

$$\mathrm{f}(x) - 1 = \frac{(c+d-a-b)x + ab - cd}{(x-c)(x-d)} \approx \frac{c+d-a-b}{x} \quad \text{十分大きな} |x|,$$

であり、分子を見ると $\mathrm{f}(x) = 1$ となる点はちょうど 1 つ、$x_0 = \dfrac{cd-ab}{c+d-a-b}$ であることがわかる。

### 値域の条件：方法

$\mathrm{f}(x) = z$ を $(x-a)(x-b) = z(x-c)(x-d)$ と変形すると、二次方程式

$$(1-z)x^2 - (a+b-(c+d)z)x + (ab - cdz) = 0.$$

が得られる。

- この方程式の解が $x = c$ や $x = d$ となることはない。そこでは左辺 $(x-a)(x-b)$ が 0 でないからである。よって、この二次方程式の実数解は、$\mathrm{f}(x) = z$ の実数解とちょうど一致する。

- $z \neq 1$ のとき、実数解が存在するための必要十分条件は、判別式 $\Delta(z) = \big(a+b-(c+d)z\big)^2 - 4(1-z)(ab-cdz)$ が $\geq 0$ となることである。これを展開し、$(c-d)^2 > 0$ を掛けて $z$ の累乗ごとに整理する。$P = (a-c)(b-d)$、$Q = (a-d)(b-c)$ とおくと、有用な恒等式は $P - Q = (a-b)(c-d)$ であり、これにより定数項 $(a-b)^2(c-d)^2$ は $(P+Q)^2 - 4PQ$ に等しい。すると与えられた不等式はちょうど $(c-d)^2\Delta(z) \geq 0$ となる。
- $z = 1$ のとき、方程式は $x$ の係数が $c+d-a-b \neq 0$ の一次方程式であるから、解が存在する。また両辺の差は $(c-d)^2(a+b-c-d)^2 > 0$ であるから、不等式も成り立つ。

### グラフの概形

$G(z) = \big[(c-d)^2 z + P + Q\big]^2 - 4PQ$ とおく。$z$ を動かすと平方の部分は $[0, \infty)$ のすべての値をとるから、$G$ の最小値は $-4PQ$ である。したがって

$$\text{関数f の値域は}\mathbb{R} \iff PQ \leq 0.$$

$PQ > 0$ のとき、$G(z) < 0$ となる $z$ の値は開区間をなし、これらが取らない値である。

> **考えてみよう** 具体的な数値がなくても、$PQ$ の符号はどうしてわかるのだろうか。

組み替えると $PQ = (a-c)(a-d)\cdot(b-c)(b-d)$ である。$a < c < d$ であるから、前半の組は負の数 2 つの積であり、正である。よって $PQ$ は $(b-c)(b-d)$ と同じ符号をもち、これが負となるのは $b$ が極 $c$ と $d$ の間にあるときに限る。すべては $c < d$ に対して $b$ がどこにあるか、そして $a+b-c-d$ の符号によって決まる：

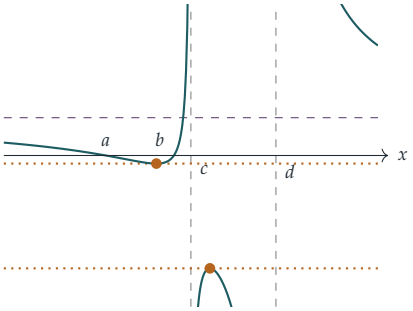
1. $a < b < c < d$：このとき自動的に $a+b < c+d$ である。
2. $a < c < b < d$：$a < c$ かつ $b < d$ であるから、やはり $a+b < c+d$ である。
3. $a < c < d < b$ かつ $a+b < c+d$。
4. $a < c < d < b$ かつ $a+b > c+d$。

よって値域が $\mathbb{R}$ 全体となるのは場合 2 のみである。場合 1、3、4 では、ある区間の値が取られない。

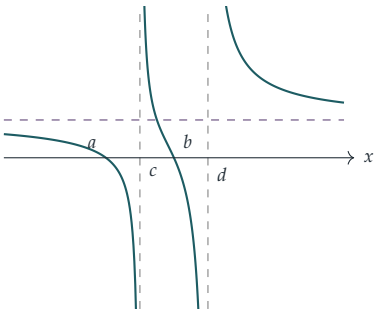
極値を調べるには、もう 1 つの道具が役立つ。f が $x_1$ で停留点（stationary point）をもち $f(x_1) = z_1$ ならば、$x_1$ は $(x-a)(x-b) - z_1(x-c)(x-d) = 0$ の重解（repeated root）である。（$z_1 = 1$ のときはこれが一次方程式になるので、このようなことは起こらない。）重解をもつことは $G(z_1) = 0$ を意味する。よって停留値は、取らない区間の

端点にちょうど一致する。場合 2 では常に $G > 0$ であるから、停留点はまったく存在しない。

各極のすぐ両側での f の符号は、負の因数の個数を数えればわかる。各図において、縦の破線は極 $x = c$、$x = d$、横の破線は漸近線 $y = 1$、琥珀色の点線は取らない区間の端点を表し、これは停留点（琥珀色の点）での値である。曲線は特定の値（各図の下に記す）で描いてあるが、その場合に属するどの選び方でも形は同じである。



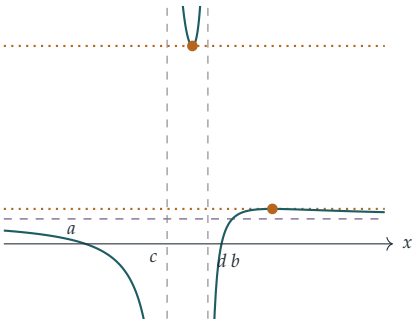

場合 1：$a, b, c, d = -2, 0, \frac{1}{2}, 3$



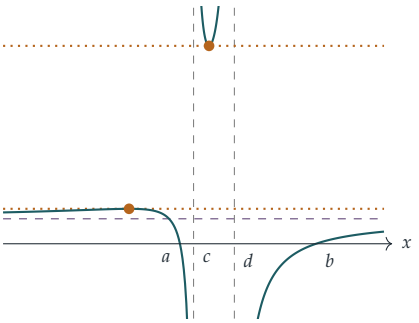

場合 2：$a, b, c, d = -1, 1, 0, 2$

**場合 1** $(a < b < c < d)$。 このとき、十分左では $f < 1$、十分右では $f > 1$ である。$x < c$ では、曲線は 1 のすぐ下から入ってきて、$a$ で 0 まで下がり、$a$ と $b$ の間で負の極小値まで下がった後、$b$ を通って上昇し、$c$ で $+\infty$ に至る。極の間では分母の 2 つの因数が異符号で分子は正であるから、両端で $f \to -\infty$ となり、その間に負の極大値をもつ。$d$ の右側では、曲線は $+\infty$ から 1 へと下がる。$(c, d)$ 上の極大値は $(a, b)$ 上の極小値より小さく、その間にある値（端点を除く）は取られない。**値域は $\mathbb{R}$ 全体ではない。**

**場合 2** $(a < c < b < d)$。 停留点は存在しない。曲線は 1 のすぐ下から $a$ を通って下がり、$c$ で $-\infty$ に至る。次に $+\infty$ から $b$ を通って $d$ で $-\infty$ に至る。最後に $+\infty$ から 1 へと下がる。中央の枝だけで、すべての実数値をとる。**値域は $\mathbb{R}$ 全体である。**




場合 3：$a, b, c, d = -3, 2, 0, \frac{3}{2}$




場合 4：$a, b, c, d = -\frac{1}{2}, \frac{9}{2}, 0, \frac{3}{2}$

**場合 3**（$a < c < d < b$、$a + b < c + d$）。 $x < c$ では、曲線は 1 のすぐ下から $a$ を通って下がり、$-\infty$ に至る。極の間では分子が負であるから、両端で $\mathrm{f} \to +\infty$ となり、極小値 $m$ をもつ。$d$ の右側では、$-\infty$ から $b$ を通って上昇し、$x_0$ で $y = 1$ を横切り、1 のわずかに上で極大値 $M$ に達した後、上側から 1 へと戻っていく。$(M, m)$ の値は取られない。ただし $1 < M < m$ である。**値域は $\mathbb{R}$ 全体ではない。**

**場合 4**（$a < c < d < b$、$a + b > c + d$）。 これは場合 3 の外側の振る舞いを逆にしたものである。十分左では f は 1 のわずかに上にあって増加している。極大値 $M > 1$ に達した後、$x_0 < a$ で $y = 1$ を横切り、$a$ を通って下がり、$c$ で $-\infty$ に至る。中央の枝は、前と同じく極小値 $m$ をもつ U 字形である。$d$ の右側では、曲線は $-\infty$ から $b$ を通って上昇し、下側から 1 に近づく。やはり $(M, m)$ は取られない。**値域は $\mathbb{R}$ 全体ではない。**

## 検算

- 恒等式：無作為に選んだ $a, b, c, d, x$ において、有限差分（finite difference）による $x\mathrm{f}'(x)/\mathrm{f}(x)$ の推定値は、右辺と約 $10^{-9}$ の精度で一致する。
- 場合 1 で $a, b, c, d = -2, 0, \frac{1}{2}, 3$ のとき：$P = \frac{15}{2}$、$Q = \frac{5}{2}$、$(c-d)^2 = \frac{25}{4}$ であり、$G(z) = 0$ から $z = -\frac{8}{5} \pm \frac{4}{5}\sqrt{3}$、すなわち約 $-0.2144$ と $-2.9856$ が得られる。これらは $\mathrm{f}'(x) = 0$ を解いて求めた停留値（$x \approx -0.515$ と $x \approx 1.060$ における値）とちょうど一致する。$4 \times 10^5$ 個の点で f の値を調べても、その値が両者の間（端点を除く）に入ることは一度もない。
- 場合 3 と 4（図に描いた値）：取らない区間は $(1.4007, 7.9327)$ であり、やはり停留値と一致する。場合 2 では、$\mathrm{f}'(x) = 0$ は実数解をもたない。

## よくある間違い

- $\mathrm{f}(x) = z$ が二次方程式となるのは $z \neq 1$ のときだけであることを忘れる。$z = 1$ の場合は別に一文を割いて扱う必要がある。
- 曲線が両端で $y = 1$ に同じ側から近づくと思い込む。実際はそうではない。$\mathrm{f} - 1 \approx (c + d - a - b)/x$ は $x$ の符号とともに符号を変える。

## STEP のその先へ

「f の値域は何か」を「どのような $z$ に対して $\mathrm{f}(x) = z$ が解をもつか」に言い換えるのは、逆像（preimage）の考え方である。また、停留値とは 2 つの解が合流するところ

である、という観察は臨界値（critical values）の理論の出発点である。この例のような次数 2 の有理関数（rational function）は二対一の写像であり、その振る舞いは複素数（complex numbers）の範囲で考えるとはるかに明快になる。そこではすべての値が（重複度（multiplicity）を込めて数えて）ちょうど 2 回ずつとられる。Needham の *Visual Complex Analysis*（『ヴィジュアル複素解析』）は、この幾何学的な見方を見事に展開している。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。