解答例

STEP II 1989、第 3 問

純粋数学 ・ 複素双曲線関数による写像

> **STEP II 1989、問 3**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/89-s2-q3

鍵となる考え方

右辺は $2\sinh(x+\mathrm{i}y)$ である。したがってこの問題は、写像（map）$u+\mathrm{i}v=\sinh(x+\mathrm{i}y)$ についての問題である。和の sinh を展開すると実部と虚部に分かれ、u と v が具体的に求まる。そのうえで x または y を固定すると、媒介変数表示された曲線（parametric curve）が残る。恒等式 $\cos^2+\sin^2=1$ と $\cosh^2-\sinh^2=1$ を使えば、その媒介変数を消去できる。

解答

u と v を求める

両辺を 2 で割ると、$u+\mathrm{i}v=\sinh(x+\mathrm{i}y)$ である。$\sinh(\mathrm{i}y)=\mathrm{i}\sin y$ と $\cosh(\mathrm{i}y)=\cos y$ を用いると、

$$\begin{aligned}\sinh(x+\mathrm{i}y)&=\sinh x\cosh(\mathrm{i}y)+\cosh x\sinh(\mathrm{i}y)\\&=\sinh x\cos y+\mathrm{i}\cosh x\sin y.\end{aligned}$$

（好みに応じて $\frac{1}{2}(\mathrm{e}^x(\cos y+\mathrm{i}\sin y)-\mathrm{e}^{-x}(\cos y-\mathrm{i}\sin y))$ を直接展開してもよい。結果は同じである。）x、y、u、v はすべて実数である。よって実部と虚部を比較すると、

$$u=\sinh x\cos y,\qquad v=\cosh x\sin y.$$

直線 $x = a$

$x = a$ を固定して y を動かすと、$u = \sinh a \cos y$、$v = \cosh a \sin y$ である。$a > 0$ より $\sinh a$ と $\cosh a$ はともに正なので、これらで割ることができる。

$$\left(\frac{u}{\sinh a}\right)^2 + \left(\frac{v}{\cosh a}\right)^2 = \cos^2 y + \sin^2 y = 1.$$

逆に、この楕円（ellipse）上のすべての点は、ある y を用いて $(\sinh a \cos y, \cosh a \sin y)$ の形に書ける。これは楕円の標準的な媒介変数表示（parametrisation）だからである。したがって直線 $x = a$ は楕円全体に対応する。このとき楕円は、y の長さ 2π の区間ごとに1周ずつ描かれる。楕円の半軸（semi-axes）は、u 軸方向に $\sinh a$、v 軸方向に $\cosh a$ である。

直線 $y = b$

次に $y = b$ を固定して x を動かすと、$u = \sinh x \cos b$、$v = \cosh x \sin b$ である。条件より $0 < \sin b < 1$ なので、$\sin b \neq 0$ である。さらに $\cos^2 b = 1 - \sin^2 b > 0$ なので、$\cos b \neq 0$ でもある。それぞれで割ると、

$$\left(\frac{v}{\sin b}\right)^2 - \left(\frac{u}{\cos b}\right)^2 = \cosh^2 x - \sinh^2 x = 1.$$

これは v 軸を主軸とし、頂点（vertices）を $(0, \pm \sin b)$ にもつ双曲線（hyperbola）である。

> **考えてみよう** なぜ一方の分枝（branch）だけなのか。また、その分枝全体が覆われるのか。

$\cosh x > 0$ かつ $\sin b > 0$ なので、常に $v > 0$ である。つまり、到達するのは上側の分枝だけである。そして、上側の分枝全体に到達する。実際、上側の分枝上に任意の点 (u, v) をとり、$x = \sinh^{-1}(u / \cos b)$ とおくと、$\sinh x \cos b = u$ となる。このとき $\cosh x \sin b$ は、その u に対する双曲線の方程式の正の解であり、それは v に等しい。したがって直線 $y = b$ は、ちょうど一方の分枝、すなわち $v > 0$ の分枝に対応する。

交点と直角

点 $x = a$、$y = b$ は両方の直線上にある。よってその像は両方の曲線上にある。

$$(u, v) = (\sinh a \cos b,\ \cosh a \sin b).$$

この点での曲線の向きを求めるため、それぞれの媒介変数表示を各自の媒介変数で微分する。楕円（$x = a$、媒介変数 y）に沿っては、$y = b$ において

$$\mathbf{t}_1 = \left(\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}y}, \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}y}\right) = (-\sinh a \sin b,\ \cosh a \cos b).$$

双曲線（$y = b$、媒介変数 x）に沿っては、$x = a$ において

$$\mathbf{t}_2 = \left(\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}, \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}\right) = (\cosh a \cos b,\ \sinh a \sin b).$$

どちらのベクトルも零ベクトルではない。いずれも成分 $\cosh a \cos b \neq 0$ をもつからである。したがって、両者はともに正真正銘の接ベクトル（tangent vector）である。その内積（scalar product）は

$$\mathbf{t}_1 \cdot \mathbf{t}_2 = -\sinh a \sin b \cosh a \cos b + \cosh a \cos b \sinh a \sin b = 0,$$

となる。よって要求どおり、楕円と双曲線の分枝はこの点で直角に交わる。

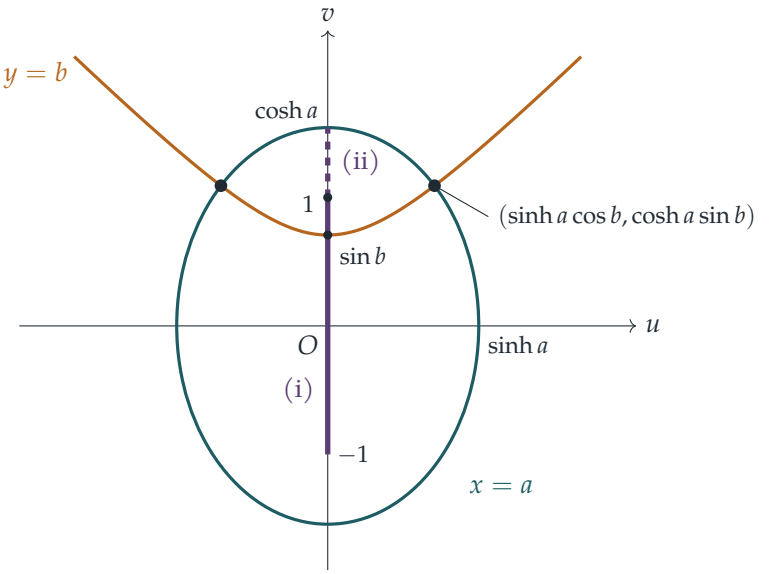
（両曲線は $u \mapsto -u$ に関して対称である。したがって $(-\sinh a \cos b, \cosh a \sin b)$ においても直角に交わる。この点は $x = -a$、$y = b$ の像であり、同じことだが $x = a$、$y = \pi - b$ の像でもある。）

概形

(i) $x = 0$ のとき $u = 0$、$v = \sin y$ である。これは v 軸上の $(0, -1)$ から $(0, 1)$ までの線分である。$\sinh a \to 0$ かつ $\cosh a \to 1$ なので、これは $a \to 0$ としたときの楕円の極限になっていることに注意しよう。

(ii) $y = \frac{1}{2}\pi$、$0 \leq x \leq a$ のとき $u = 0$、$v = \cosh x$ であり、v は 1 から $\cosh a$ まで増加する。これは v 軸上の $(0, 1)$ から楕円の最上点 $(0, \cosh a)$ までの線分である。

双曲線の分枝の頂点は $(0, \sin b)$ にあり、これは線分 (i) 上にある。図では $a = 1$、$b = \frac{1}{4}\pi$ としている。



線分 (i) は実線、線分 (ii) は破線で示している。両者を合わせると、v 軸上を -1 から楕円の最上点まで上っていく。もし代わりにすべての実数 x に対して $y = \frac{1}{2}\pi$ をとると、v 軸上の半直線 $v \geq 1$ が 2 重に得られる。これは問題で除外されている退化した場合 $\sin b = 1$ にあたる。

検算

- 2 つの 2 次曲線（conics）はともに焦点（foci）を $(0, \pm 1)$ にもつ。楕円については $\cosh^2 a - \sinh^2 a = 1$、双曲線については $\sin^2 b + \cos^2 b = 1$ だからである。共焦点（confocal）の楕円と双曲線は常に直角に交わるので、今回の結果と一致する。
- 数値的に確かめると、$a = 1$、$b = \frac{1}{4}\pi$ のとき $\sinh(1 + \frac{1}{4}\pi\mathrm{i}) \approx 0.8310 + 1.0911\mathrm{i}$ であり、$(\sinh 1 \cos \frac{1}{4}\pi,\ \cosh 1 \sin \frac{1}{4}\pi)$ と一致する。また、多数のランダムな (a, b) について、2 つの曲線の方程式と内積が零になることも確かめた。

よくある間違い

- $\mathrm{i}\sin y$ ではなく $\sinh(\mathrm{i}y) = \sin y$ と書いてしまう。こうすると u と v の役割が入れ替わってしまう。
- 「双曲線」と言うだけで、なぜ $v > 0$ の分枝だけが現れるのかを説明しない。
- $\cos b \neq 0$ を確認せずに、それで割ってしまう。条件 $\sin b < 1$ はまさにそのためにある。

STEP のその先へ

写像 $z \mapsto \sinh z$ は**等角**（conformal）である。導関数が零でない点では角を保つ。そのため、直線 $x =$ 定数 と $y =$ 定数 からなる直交する格子は、曲線からなる直交する格子に写らなければならない。ここではそれが共焦点の楕円と双曲線である。平板やスリットのまわりでラプラス方程式（Laplace's equation）を解くときに、このような「楕円座標」（elliptic coordinates）が現れるのはこのためである。Needham の *Visual Complex Analysis*（視覚的に学ぶ複素解析）は等角写像を見事に解説しており、まさにこの種の図が数多く載っている。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。