解答例

STEP II 1989、第 2 問

純粋数学 ・ べき級数の係数

> **STEP II 1989、問 2**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/89-s2-q2

鍵となる考え方

ある関数の x における値と、同じ関数の $2x$ における値とを結びつける三角関数の恒等式（trigonometric identity）は、冪級数（power series）の係数（coefficient）どうしの関係に翻訳できる。x を $2x$ に置き換えると x^n の係数は 2^n 倍になるので、両辺を冪級数で表してしまえば、係数を比較するだけで関係式がそのまま読み取れる。ここで役に立つ工夫は、はじめに全体に x を掛けておくことである。そうすれば、どの項も 0 において本当に冪級数展開をもつ関数になる。

解答

以下では常に x は十分小さく、かつ 0 でないとする。したがって以下に現れる級数はすべて収束（converge）する（たとえば $0 < |x| < \frac{\pi}{4}$ であれば、ここに現れる関数はすべて性質のよい関数である）。0 を含む区間上で一致する二つの収束冪級数は係数がすべて等しいので、x^n の係数を比較してよい。

a_{n-1} と b_n の関係

まず $(*)$ を確かめる：

$$\cot x - \tan x = \frac{\cos^2 x - \sin^2 x}{\sin x \cos x} = \frac{\cos 2x}{\frac{1}{2}\sin 2x} = 2\cot 2x.$$

両辺に x を掛けると

$$x\cot x - x\tan x = (2x)\cot(2x).$$

ここで各項を級数で表す。

- $x\cot x = 1 + \sum_{n\geq 1} b_n x^n$。
- $x\tan x = \sum_{m\geq 0} a_m x^{m+1} = \sum_{n\geq 1} a_{n-1}x^n$（$n = m+1$ とおいた）。
- x が小さければ $2x$ も小さいので、$x\cot x$ の級数において x を $2x$ に置き換えてよい：

$$(2x)\cot(2x) = 1 + \sum_{n\geq 1} b_n (2x)^n = 1 + \sum_{n\geq 1} 2^n b_n x^n.$$

よって

$$1 + \sum_{n\geq 1} (b_n - a_{n-1})x^n = 1 + \sum_{n\geq 1} 2^n b_n x^n.$$

定数項は一致しており、$n \geq 1$ について x^n の係数を比較すると $b_n - a_{n-1} = 2^n b_n$、すなわち

$$a_{n-1} = (1 - 2^n)\, b_n \qquad (n \geq 1),$$

が得られる。これが示すべきことであった。

> **考えてみよう** $\cot x$ そのものを扱うのではなく、展開する前に x を掛けるのはなぜか。

$\cot x$ は 0 で発散するので、そこでは冪級数展開をもたない。問題で与えられているのは $x\cot x$ の級数だけである。恒等式全体に x を掛けると、どの項も「冪級数展開をもつ関数」の形になり、右辺の余接の項は $(2x)\cot(2x)$、つまり同じ関数を $2x$ で評価したものになる。これこそ必要な形である。

係数 c_n

対になる恒等式は、差ではなく和をとったものである：

$$\cot x + \tan x = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\sin x \cos x} = \frac{1}{\frac{1}{2}\sin 2x} = 2\operatorname{cosec} 2x.$$

再び x を掛けると

$$x\cot x + x\tan x = (2x)\operatorname{cosec}(2x).$$

先ほどと同じ展開と、$x\operatorname{cosec} x$ の級数で x を $2x$ に置き換えたものを用いると

$$1 + \sum_{n\geq 1} (b_n + a_{n-1})x^n = 1 + \sum_{n\geq 1} 2^n c_n x^n,$$

となるので、$n \geq 1$ に対して

$$2^n c_n = b_n + a_{n-1}.$$

ここで最初の結果を用いて b_n を消去する。$n \geq 1$ より $1-2^n \neq 0$ であるから $b_n = \dfrac{a_{n-1}}{1-2^n}$ となり、

$$2^n c_n = a_{n-1}\left(\frac{1}{1-2^n}+1\right) = a_{n-1}\frac{2-2^n}{1-2^n} = a_{n-1}\frac{2\left(2^{n-1}-1\right)}{2^n-1}.$$

両辺を 2^n で割り、$2/2^n = 1/2^{n-1}$ と書くと

$$c_n = \frac{2^{n-1}-1}{2^n-1}\cdot\frac{1}{2^{n-1}}\,a_{n-1} \qquad (n \geq 1),$$

となり、これが求める結果である。

検算

$\tan x = x + \frac{1}{3}x^3 + \frac{2}{15}x^5 + \cdots$ より $a_1 = 1$、$a_3 = \frac{1}{3}$ である。最初の結果からは $b_2 = a_1/(1-4) = -\frac{1}{3}$、$b_4 = a_3/(1-16) = -\frac{1}{45}$ が予想され、これは $x\cot x = 1 - \frac{1}{3}x^2 - \frac{1}{45}x^4 - \cdots$ と一致する。二つ目の結果からは $c_2 = \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}\cdot 1 = \frac{1}{6}$、$c_4 = \frac{7}{15}\cdot\frac{1}{8}\cdot\frac{1}{3} = \frac{7}{360}$ が予想され、これは $x\operatorname{cosec} x = 1 + \frac{1}{6}x^2 + \frac{7}{360}x^4 + \cdots$ と一致する。また $n = 1$ の場合にも注意しておくと、$a_0 = 0$ かつ $b_1 = c_1 = 0$ であり、どちらの公式とも矛盾しない。sin と cos の級数の割り算によって、$n \leq 23$ のすべてについて両方の関係式を（分数で）厳密に確かめた。また、級数の値を $\tan 0.3 \approx 0.309336$ および $0.3\operatorname{cosec} 0.3 \approx 1.015159$ と照合した。

よくある間違い

- 添字のずれ（index shift）を忘れる：$x\tan x$ の x^n の係数は a_n ではなく a_{n-1} である。
- $x\cot x$ の x に $2x$ を代入したつもりで $2x\cot x$ や $x\cot 2x$ と書いてしまう。恒等式に現れる項は正確に $(2x)\cot(2x)$ でなければならない。
- $1-2^n \neq 0$ であることを確認せずにそれで割ってしまう。

STEP のその先へ

ここに現れた係数は、簡単な因子を除けばベルヌーイ数（Bernoulli numbers）である：$x\cot x = \sum_{k\geq 0}(-1)^k \frac{2^{2k}B_{2k}}{(2k)!}x^{2k}$ であり、この問題の関係式によって正接と余割の級数がベルヌーイ数で表される。0 の近くで一致する二つの冪級数の係数を等しいとおいてよいという事実（冪級数の一致の定理（identity theorem））は、解析学の最初の講義で証明される。さらに学ぶには、冪級数については Abbott, *Understanding Analysis*（解

析学入門）を、これらの展開が複素関数から自然に現れる様子については Needham, *Visual Complex Analysis*（視覚的な複素解析）を参照するとよい。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。