解答例

STEP II 1989、第 15 問

確率・統計 ・ 幾何的確率

STEP II 1989、問 15

先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：

step.maths.org/questions/89-s2-q15

鍵となる考え方

「周（perimeter）上に無作為に」選ばれた点は長さに関して一様（uniform）に分布するので、すべては全長 $\pi+2$ から始まる。三角形は常に中心 O を頂点にもつから、その面積は $\frac{1}{2}ab\sin C$ である。ここで a と b は O からの距離、C は O における角である。各場合の条件付き期待値（conditional expectation）はそれぞれ簡単な期待値（expectation）の計算に帰着し、全期待値の法則（law of total expectation）によってそれらをつなぎ合わせることができる。

解答

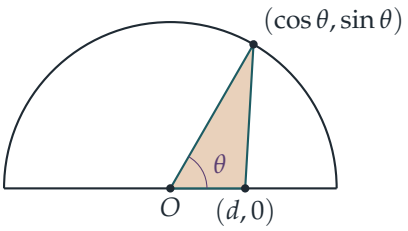
O を原点にとり、直径（diameter）を x 軸上の $(-1,0)$ から $(1,0)$ まで、弧（arc）を $y\geq 0$ の側におく。周の長さは $2+\pi$ であり、直径が 2、弧が π を占める。各点は周に沿って一様に分布するから、

$$\mathrm{P}(\text{点が直径上にある})=\frac{2}{\pi+2},\qquad \mathrm{P}(\text{点が弧上にある})=\frac{\pi}{\pi+2}.$$

弧上にあるという条件のもとでは、点は $(\cos\theta,\sin\theta)$ と表され、θ は $[0,\pi]$ 上で一様である。直径上にあるという条件のもとでは、点は $(d,0)$ と表され、d は $[-1,1]$ 上で一様である。

2 点は独立（independent）であり、「ちょうど 1 点が直径上にある」という事象は、1 点目が直径上にある場合と 2 点目が直径上にある場合のどちらでも起こりうるので、

$$\mathrm{P}(\text{ちょうど 1 点が直径上にある})=2\cdot\frac{2}{\pi+2}\cdot\frac{\pi}{\pi+2}=\frac{4\pi}{(\pi+2)^2}.$$



小問 (i)

一方の点を直径上の $(d,0)$、他方を弧上の $(\cos\theta,\sin\theta)$ とする。O から出る 2 辺の長さは $|d|$ と 1 であり、そのなす角は θ である（$d<0$ のときはなす角が $\pi-\theta$ となるが、正弦の値は同じである）。よって

$$A=\tfrac{1}{2}\,|d|\sin\theta.$$

この場合という条件のもとで d と θ は独立であるから、積の期待値は期待値の積に等しい。d は $[-1,1]$ 上で一様なので、$|d|$ は $[0,1]$ 上で一様であり、$\mathrm{E}|d|=\frac{1}{2}$ である。また

$$\mathrm{E}(\sin\theta)=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\sin\theta\,\mathrm{d}\theta=\frac{2}{\pi}.$$

したがって

$$\mathrm{E}(A\mid \text{ちょうど 1 点が直径上にある})=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{\pi}=\frac{1}{2\pi},$$

となり、求める結果が得られた。

小問 (ii)

今度は 2 点とも弧上にあり、その角を θ_1,θ_2 とする。これらは独立で、$[0,\pi]$ 上で一様である。2 点はどちらも O から距離 1 にあり、O におけるなす角は $X=|\theta_1-\theta_2|$ で、これは $[0,\pi]$ に属する。よって

$$A=\tfrac{1}{2}\sin X.$$

考えてみよう なぜ X について与えられた密度を使ってよいのだろうか。

角 θ は単位半円に沿った弧の長さを表しているので、弧上に一様に 2 点を選ぶことは、長さ π の線分上に一様に 2 点を選ぶことと同じである。角 X はちょうどその 2 点間の距離であるから、X は $[0,\pi]$ 上で密度（density）$2(\pi-x)/\pi^2$ をもつ。ゆえに

$$\mathrm{E}(\sin X)=\frac{2}{\pi^2}\int_0^{\pi}(\pi-x)\sin x\,\mathrm{d}x.$$

積分を分けると $\int_0^\pi \pi \sin x \,\mathrm{d}x = 2\pi$ であり、$u = x$ として部分積分（integration by parts）を行うと

$$\int_0^\pi x \sin x \,\mathrm{d}x = \Big[-x\cos x\Big]_0^\pi + \int_0^\pi \cos x \,\mathrm{d}x = \pi + 0 = \pi.$$

よって $\int_0^\pi (\pi - x)\sin x \,\mathrm{d}x = 2\pi - \pi = \pi$ となり、$\mathrm{E}(\sin X) = \dfrac{2}{\pi}$ および

$$\mathrm{E}(A \mid \text{どちらの点も直径上にない}) = \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{\pi} = \frac{1}{\pi},$$

が得られ、求める結果が示された。

A の期待値

3 つ目の場合がある。2 点とも直径上にあるときは、「三角形」は退化（degenerate）している（3 点すべてが x 軸上にある）ので、$A = 0$ である。どちらの点も直径上にない確率は $\left(\frac{\pi}{\pi+2}\right)^2$ である。全期待値の法則により

$$\begin{aligned}\mathrm{E}(A) &= \frac{4\pi}{(\pi+2)^2}\cdot\frac{1}{2\pi} + \frac{\pi^2}{(\pi+2)^2}\cdot\frac{1}{\pi} + \frac{4}{(\pi+2)^2}\cdot 0\\ &= \frac{2+\pi}{(\pi+2)^2}\\ &= \frac{1}{2+\pi},\end{aligned}$$

となり、これが求めたかった結果である。

検算

- 3 つの場合の確率 $\frac{4}{(\pi+2)^2}$, $\frac{4\pi}{(\pi+2)^2}$, $\frac{\pi^2}{(\pi+2)^2}$ の和は $\frac{(2+\pi)^2}{(\pi+2)^2} = 1$ である。
- 当然そうあるべきとおり、$\mathrm{E}(A) \le \frac{1}{2}$（とりうる最大の面積で、2 本の半径が直角をなす場合）が成り立つ。実際、$\frac{1}{2+\pi} \approx 0.1945$ である。
- 2×10^6 組の点の対によるモンテカルロ・シミュレーション（Monte Carlo simulation）では、P(ちょうど 1 点) ≈ 0.4757（厳密値 0.4754）、条件付き平均 0.1591 と 0.3184（厳密値 $\frac{1}{2\pi} \approx 0.1592$ と $\frac{1}{\pi} \approx 0.3183$）、そして $\mathrm{E}(A) \approx 0.1944$ が得られた。

よくある間違い

- P(ちょうど 1 点) の因数 2 を忘れる。どちらの点も直径上にある方の点になりうる。
- 「直径上にある」確率を $\frac{1}{2}$ とみなす。選び方は長さに関して一様なのであって、境界のどの部分かについて一様なのではない。

▶ 小問 (ii) で、半径のなす角の正弦ではなく、$\sin\theta_1 \sin\theta_2$ などを用いてしまう。

STEP のその先へ

期待値を場合の分割に沿って $\mathrm{E}(A) = \sum_i \mathrm{E}(A \mid B_i)\,\mathrm{P}(B_i)$ と分けることは全期待値の法則であり、大学 1 年の確率論における主力の道具の一つである。その一般形 $\mathrm{E}(A) = \mathrm{E}\big(\mathrm{E}(A \mid Y)\big)$ は、分枝過程（branching processes）からマルコフ連鎖（Markov chains）まで、あらゆるところに現れる。小問 (ii) で引用された X の密度は、それ自体がよい演習問題である。これは正方形 $[0,\pi]^2$ の中の帯状領域の面積から導かれる。このような問題は幾何確率（geometric probability）に属する。Grimmett と Welsh の *Probability: An Introduction*（確率論入門）は、条件付き期待値と同時密度（joint densities）をちょうどよい水準で扱っている。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。