解答例

STEP II 1989、第 14 問

力学 ・ 円運動

STEP II 1989、問 14

先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：

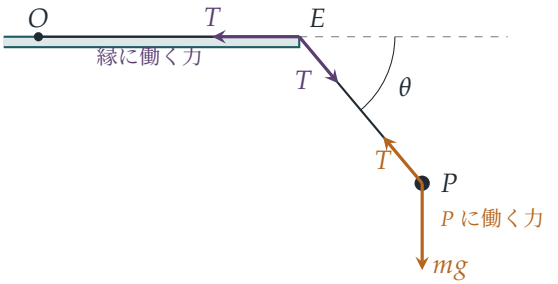
step.maths.org/questions/89-s2-q14

鍵となる考え方

質点を放したあとも、台の上にある部分の糸は動かない。固定された端と台の縁との間でぴんと張られたままだからである。したがって縁は固定された支点としてはたらき、質点はそのまわりを半径 a の円周上で運動する。これは水平位置から放した単振り子（simple pendulum）とまったく同じである。速さはエネルギーから、張力（tension）は半径方向の運動方程式（equation of motion）から求まる。縁はなめらかなので、張力は縁の両側で等しく、縁に働く力は 2 本の糸に沿って引く等しい 2 つの張力のベクトル和である。

解答

モデル化。 糸は軽く伸び縮みせず、台の上面はなめらかで薄く、質点は大きさのない質点とする。糸の固定端を O、糸が縁にかかる点を E とすると、$OE = l - a$ であり、垂れ下がった部分 EP の長さは a である。垂れ下がった部分が水平（はじめの向きで、台から離れる向き）から下方へ回転した角を θ とする。



O は固定されており、糸は張ったままである（$T > 0$ であることは後で確かめる）から、部分 OE は台の上にとどまり静止したままである。よって P は中心 E、半径 a の円周上を運動する。

速さ。 台はなめらかで、張力はつねに P の運動と垂直であるから、どちらも仕事をせず、力学的エネルギーが保存される（conservation of mechanical energy）。糸が θ だけ回転したとき、P は高さ $a\sin\theta$ だけ落下しているので、静止状態から始めると

$$\tfrac{1}{2}mv^2 = mga\sin\theta \qquad \Longrightarrow \qquad v^2 = 2ga\sin\theta.$$

張力。 PE に沿って中心 E へ向かう方向に分解する。張力は PE に沿って働き、重力の PE 方向の成分は E から**遠ざかる**向きに $mg\sin\theta$ である（$0 < \theta < \pi$ では P は E の高さより下にある）。よって

$$T - mg\sin\theta = \frac{mv^2}{a} = 2mg\sin\theta, \qquad \text{ゆえに} \qquad \boxed{T = 3mg\sin\theta.}$$

これは $0 < \theta < \pi$ で正であるから、糸は運動の間ずっと張ったままである。$\theta = \pi$ では $v = 0$ となる。質点はちょうど E と同じ高さで台の下面に達し、引き返す。したがって運動は $0 \le \theta \le \pi$ の範囲で起こる。

縁に働く力。 縁はなめらかなので、張力はその両側で T である。糸は大きさ T の 2 つの引く力で縁を押す。1 つは EO に沿って固定端へ向かう水平な力、もう 1 つは EP に沿う力である。x 軸を台から離れる水平方向、y 軸を鉛直上向きにとる。EO 方向と EP 方向の単位ベクトルはそれぞれ $(-1, 0)$ と $(\cos\theta, -\sin\theta)$ であるから、縁に働く力は

$$\mathbf{F} = T\,(\cos\theta - 1,\ -\sin\theta).$$

その大きさは

$$|\mathbf{F}| = T\sqrt{(1-\cos\theta)^2 + \sin^2\theta} = T\sqrt{2 - 2\cos\theta} = 2T\sin\tfrac{\theta}{2}$$

である。ここで $1 - \cos\theta = 2\sin^2\frac{\theta}{2}$ を用い、$0 \le \theta \le \pi$ では $\sin\frac{\theta}{2} \ge 0$ であることを使った。（幾何的に見れば、角 $\pi - \theta$ をなす 2 つの等しい力 T の和は $2T\cos\frac{\pi-\theta}{2}$ であり、同じ結果になる。）T と $\sin\theta = 2\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}$ を代入すると

$$|\mathbf{F}| = 6mg\sin\theta\sin\tfrac{\theta}{2} = 12mg\,s^2\sqrt{1-s^2}, \qquad \text{ただし} s = \sin\tfrac{\theta}{2} \in [0, 1].$$

考えてみよう $s^2\sqrt{1-s^2}$ をすっきりと最大化するにはどうすればよいか。

これは非負であるから、その 2 乗 $h(u) = u^2(1-u)$（$u = s^2 \in [0,1]$）を最大化すれば十分である。すると $h'(u) = 2u - 3u^2 = u(2-3u)$ であり、これは $0 < u < \frac{2}{3}$ で正、$\frac{2}{3} < u \le 1$ で負である。よって h は $[0,1]$ において $u = \frac{2}{3}$ で最大となり、そのとき $h = \frac{4}{9} \cdot \frac{1}{3} = \frac{4}{27}$ である。したがって $s^2\sqrt{1-s^2}$ の最大値は $\sqrt{4/27} = \dfrac{2}{3\sqrt{3}}$ であり、

$$|\mathbf{F}|_{\max} = 12mg \cdot \frac{2}{3\sqrt{3}} = \frac{8mg}{\sqrt{3}},$$

となって、求める結果が得られた。最大となるのは $\sin^2\frac{\theta}{2} = \frac{2}{3}$、すなわち $\cos\theta = 1 - 2\sin^2\frac{\theta}{2} = -\frac{1}{3}$ のときであり、$\theta \approx 109.5^\circ$ である。このとき質点はすでに縁の真下を通り過ぎ、台の下へと振れ込んでいる。

検算

- $\theta = \frac{\pi}{2}$（糸が鉛直）のとき、速さは $\sqrt{2ga}$、$T = 3mg$ であり、水平位置から放した振り子についてよく知られた結果と一致する。このとき縁に働く力は $T\sqrt{2} = 3\sqrt{2}\,mg \approx 4.24mg$ であり、$8mg/\sqrt{3} \approx 4.62mg$ よりやや小さい。これは最大となる位置が鉛直より先にあることと整合する。
- $\theta = 0$ と $\theta = \pi$ では質点は縁と同じ高さで瞬間的に静止しているので $T = 0$ となり、縁には力が働かない。式もそのとおりになっている。
- 運動方程式 $\ddot{\theta} = (g/a)\cos\theta$ を数値的に積分した。半径方向の方程式から得た T は $3mg\sin\theta$ と 10^{-12} の精度で一致し、縁に働く力の最大は $\theta \approx 1.9106$（すなわち $\arccos(-\frac{1}{3})$）で値 $4.6188\,mg$ となり、$8/\sqrt{3}$ と一致した。

よくある間違い

- 縁に働く力を単に T としたり、垂れ下がった糸による引く力の鉛直成分だけとしたりすること。台の上の糸も縁を水平に引いており、2 つの引く力をベクトルとして足し合わせなければならない。
- 最大化を $\theta \le \frac{\pi}{2}$ の範囲で打ち切ってしまうこと。質点は台の下まで運動を続け、最大値はその後の段階にある。

STEP のその先へ

ここでの張力は**拘束力**（constraint force）である。仕事をせず、質点を円周上に保つのに必要なだけの大きさをとる。ラグランジュ力学（Lagrangian mechanics）では、このような力は運動方程式から完全に消え、あとから（ここで半径方向の方程式を用い

たように）求めるか、ラグランジュの未定乗数（Lagrange multipliers）を用いて求める。Kleppner と Kolenkow の *An Introduction to Mechanics*（力学入門）は、円運動、拘束、エネルギーを用いる方法をこのレベルで丁寧に扱っている。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。