解答例

STEP II 1989、第 13 問

力学 ・ 慣性モーメント

> **STEP II 1989、問 13**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/89-s2-q13

この問題は、*Beyond STEP* の第 11.7 節「**棒の中のシンプソンの公式**」で詳しく解説されている：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/ch11/simpsons-rod.html

鍵となる考え方

すべては慣性モーメント（moment of inertia）に関する二つの事実に基づいている。平行軸の定理（parallel axis theorem）によれば、任意の軸のまわりの慣性モーメントは、質量、重心（centre of mass）、そして重心を通る平行な軸のまわりの慣性モーメントによって決まる。また、慣性モーメントは**加法的**（*additive*）であるから、物体をいくつかの部分に切り分け、各部分をそれと等価なものに置き換えることができる。薄板（lamina）は細い棒（rod）を積み重ねたものであるから、棒一本の置き換え方がわかれば、薄板を置き換えることができる。

解答

すべての軸についての等価性

ℓ を任意の軸とし、ℓ_O を O を通り ℓ に平行な軸とし、その ℓ からの距離を d とする。物体と質点（particle）系はともに質量 m、重心 O をもつから、それぞれに平行軸の定理を適用できる：

$$I_\ell^{\text{物体}} = I_{\ell_O}^{\text{物体}} + md^2, \qquad I_\ell^{\text{質点系}} = I_{\ell_O}^{\text{質点系}} + md^2.$$

ℓ_O は O を通るので、仮定より $I_{\ell_O}^{\text{物体}} = I_{\ell_O}^{\text{質点系}}$ である。よって二つの右辺は等しく、すべての軸 ℓ について $I_\ell^{\text{物体}} = I_\ell^{\text{質点系}}$ が成り立つ。これが示すべきことであった。

一様な棒

棒を x 軸に沿って $x=-a$ から $x=a$ まで置く。このとき重心 O は原点である。質量 p, q, r の質点をそれぞれ $x=-a, 0, a$ に置く。全質量が m で重心が O であるためには

$$p+q+r=m, \qquad -pa+ra=0,$$

が必要であるから、$r=p$ かつ $q=m-2p$ である。

次に、O を通り棒と角 θ をなす任意の軸を考える。位置 x にある棒上の点とこの軸との距離は $|x|\sin\theta$ である。したがって、O を通る軸のまわりの慣性モーメントはすべて $\sum(\text{質量})\,x^2$ の $\sin^2\theta$ 倍であり、この一つの和が一致すれば十分である。棒については、各微小部分の質量が $\frac{m}{2a}\,\mathrm{d}x$ であるから

$$\int_{-a}^{a}\frac{m}{2a}\,x^2\,\mathrm{d}x=\frac{m}{2a}\cdot\frac{2a^3}{3}=\tfrac{1}{3}ma^2,$$

であり、質点系については $pa^2+q\cdot 0+pa^2=2pa^2$ である。$p=\frac{1}{6}m$ のとき、これらはすべての θ について一致する。よって棒は次の質点系と力学的に等価（dynamically equivalent）である：

$$\tfrac{1}{6}m\text{(両端それぞれ)}, \qquad \tfrac{2}{3}m\text{(中点)}.$$

前半の結果により、このとき両者は O を通る軸に限らず、**任意の**軸のまわりで同じ慣性モーメントをもつ。

長方形の薄板

長方形の中心を O、辺の長さを $2a$（x 軸に平行）と $2b$ とする。このとき単位面積あたりの質量は $M/(4ab)$ である。これを x 軸に平行な細い帯に切り分ける。高さ y にある幅 δy の帯は、長さ $2a$、質量 $\delta M=\frac{M}{2b}\,\delta y$ の一様な棒である。

> **考えてみよう** 帯の中心は O にない。それでも各帯をその三つの質点で置き換えてよいのはなぜか。

これこそが前半の結果の役割である。各帯は、帯自身の中心を通る軸に限らず**すべての**軸のまわりで、その三つの質点と同じ慣性モーメントをもつ。慣性モーメントは加え合わせられるので、薄板は任意の軸のまわりで、置き換えたすべての質点の集まりと同じ慣性モーメントをもつ。各帯の置き換えは帯と同じ質量と重心をもつから、その集まりも全質量 M、重心 O をもつ。

高さ y の帯は、$(\pm a, y)$ のそれぞれに $\frac{1}{6}\delta M=\frac{M}{12b}\,\delta y$、$(0,y)$ に $\frac{2}{3}\delta M=\frac{M}{3b}\,\delta y$ の質点で置き換えられる。y が $-b$ から b まで動くと、これらの質点は長さ $2b$ の三本の一様な棒を形づくる：

- 各辺 $x = \pm a$ に沿う棒が一本ずつで、それぞれの質量は $\frac{M}{12b} \cdot 2b = \frac{1}{6}M$；
- 中心線 $x = 0$ に沿う棒が一本で、質量は $\frac{M}{3b} \cdot 2b = \frac{2}{3}M$。

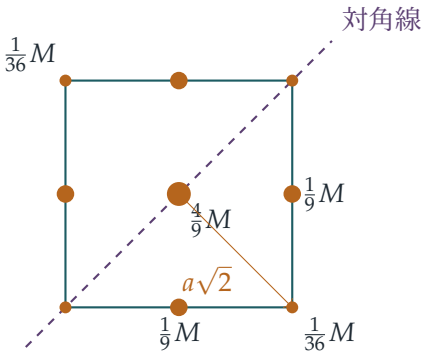
同じ加法性の議論により、これらの棒それぞれに棒についての結果を適用する：

- 各辺の棒（$\frac{1}{6}M$）は、両端（すなわち角）のそれぞれにある $\frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6}M = \frac{1}{36}M$ と、中点（すなわち長さ $2b$ の辺の中点）にある $\frac{2}{3} \cdot \frac{1}{6}M = \frac{1}{9}M$ になる；
- 中央の棒（$\frac{2}{3}M$）は、両端（すなわち長さ $2a$ の辺の中点）のそれぞれにある $\frac{1}{6} \cdot \frac{2}{3}M = \frac{1}{9}M$ と、中心にある $\frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3}M = \frac{4}{9}M$ になる。

したがって、各角に $\frac{1}{36}M$、各辺の中点に $\frac{1}{9}M$、中心に $\frac{4}{9}M$ がある。合計は $\frac{4}{36}M + \frac{4}{9}M + \frac{4}{9}M = M$ であり、対称性から重心は O である。これが求める等価な質点系である。

対角線のまわりの正方形

一辺 $2a$ の正方形について、角を $(\pm a, \pm a)$ に置き、対角線 $y = x$ をとる。点 (x_0, y_0) とこの直線との距離は $|x_0 - y_0|/\sqrt{2}$ である。



- 角 $(a, a), (-a, -a)$ と中心は対角線上にあり、寄与しない。
- 角 $(a, -a), (-a, a)$ は距離 $2a/\sqrt{2} = a\sqrt{2}$ にある。
- 各中点 $(\pm a, 0), (0, \pm a)$ は距離 $a/\sqrt{2}$ にある。

よって

$$I_{\text{対角線}} = 2 \cdot \tfrac{1}{36}M \cdot 2a^2 + 4 \cdot \tfrac{1}{9}M \cdot \tfrac{1}{2}a^2 = \tfrac{1}{9}Ma^2 + \tfrac{2}{9}Ma^2 = \tfrac{1}{3}Ma^2.$$

一様でない棒

長さ $2a$ の棒が x 軸に沿って $x = 0$ から $x = 2a$ まであり、その線密度（line density）が kx であるとする。このとき

$$m = \int_0^{2a} kx \,\mathrm{d}x = 2ka^2, \qquad \text{よって} \qquad k = \frac{m}{2a^2}.$$

重心の位置は

$$\bar{x} = \frac{1}{m}\int_0^{2a} kx^2 \,\mathrm{d}x = \frac{k}{m}\cdot\frac{8a^3}{3} = \frac{4a}{3},$$

であり、また

$$\int_0^{2a} kx^3 \,\mathrm{d}x = \frac{k\,(2a)^4}{4} = 4ka^4 = 2ma^2.$$

一様な棒の場合と同様に、すべての点は一本の直線上にあるので、重心を通り棒と角 θ をなす軸のまわりの慣性モーメントは $\sin^2\theta\sum(\text{質量})(x-\bar{x})^2$ である。質量と重心が一致していれば $\sum(\text{質量})(x-\bar{x})^2 = \sum(\text{質量})x^2 - m\bar{x}^2$ であるから、$\sum(\text{質量})\,x^2$ を一致させれば十分である。これは端 $x = 0$ を通り棒に垂直な軸のまわりの慣性モーメントである。

質点を、$x = 0$ に p_0、$x = a$ に p_1、$x = 2a$ に p_2 とする。質量、一次モーメント（first moment）、二次モーメント（second moment）を一致させると、次の方程式が得られる：

$$\begin{aligned} p_0 + p_1 + p_2 &= m, \\ p_1 a + 2p_2 a &= \tfrac{4}{3}ma, \\ p_1 a^2 + 4p_2 a^2 &= 2ma^2. \end{aligned}$$

第 3 式を a^2 で割ったものから第 2 式を a で割ったものを引くと $2p_2 = \frac{2}{3}m$ となり、$p_2 = \frac{1}{3}m$ である。すると $p_1 = \frac{4}{3}m - \frac{2}{3}m = \frac{2}{3}m$ であり、最後に $p_0 = m - \frac{2}{3}m - \frac{1}{3}m = 0$ となる。

軽い側の端にある質点の質量は 0 であるから、必要な質点は二つだけである：中点に $\frac{2}{3}m$、重い側の端に $\frac{1}{3}m$。

検算

- 一辺 $2a$ の正方形の薄板について、その面内にあり中心を通って一辺に平行な軸のまわりの慣性モーメントは、よく知られた結果により $\frac{1}{3}Ma^2$ である。直交軸の定理（perpendicular axis theorem）と対称性により、中心を通る面内のすべての軸で同じ値になるから、対角線についても同じでなければならない。これは上の結果と一致する。

- 一様でない棒について、二つの質点は質量 m、一次モーメント $\frac{2}{3}m\cdot a+\frac{1}{3}m\cdot 2a=\frac{4}{3}ma$（よって重心は $\frac{4}{3}a$）、二次モーメント $\frac{2}{3}ma^2+\frac{4}{3}ma^2=2ma^2$ を与え、すべて要求どおりである。
- 数値的にも、細かい格子状の点質量を用いて、各物体とその質点系を空間内の100〜200本のランダムな軸（中心を通らないもの）のまわりで比較した。棒と密度が変化する棒は 10^{-7} より良い精度で一致し、長方形は 4×10^{-5} まで一致し（格子による誤差）、対角線のまわりの正方形は $M=a=1$ に対して 0.33332 を与えた。

よくある間違い

- 各帯をその三つの質点で置き換えてよい理由を述べずに置き換えてしまうこと。帯の中心は O にないので、前半の「任意の軸」についての結果が必要である。
- 最後の小問で、質量と重心の条件だけを課すこと。二つの方程式では三つの質量は決まらない。$p_0=0$ を導くのは慣性モーメントの条件である。

STEP のその先へ

空間内を運動する剛体にとって、力学的に重要なのは、その質量、重心、そして**慣性テンソル**（*inertia tensor*）である。慣性テンソルは 3×3 の対称行列であり、重心を通るすべての軸のまわりの慣性モーメントを与える。これらを共有する二つの物体は、同じ力のもとでまったく同じように運動する。「力学的に等価」という名前がふさわしいのはこのためである。分布の最初のいくつかのモーメントを少数の点質量で一致させるという発想は、数値積分の背後にある考え方でもある。一様な棒に対する重み $\frac{1}{6},\frac{2}{3},\frac{1}{6}$ はまさにシンプソンの公式（Simpson's rule）であり、重みだけでなく位置も選ぶことにするとガウス求積（Gaussian quadrature）に至る。Kleppner と Kolenkow の *An Introduction to Mechanics*（力学入門）では、慣性テンソルと剛体の運動が展開されている。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。