解答例

STEP II 1989、第 12 問

力学 ・ 剛体のつり合い

> **STEP II 1989、問 12**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/89-s2-q12

鍵となる考え方

薄板（lamina）にはたらく力は三つだけである。重力と、二本のペグ（peg）からの抗力（reaction）である。なめらかなペグは接している辺に垂直に押すので、長方形の場合、それぞれの抗力は**もう一方の辺に平行**な向きになる。互いに平行でない三つの力で物体がつり合い（equilibrium）の状態に保たれるには、それらの作用線（line of action）が一点で交わらなければならない。したがって、二つの抗力の作用線の交点は、重心を通る鉛直線上にある。二つの結果はどちらも、この一つの事実と、ペグが同じ高さにあるという条件から導かれる。

解答

設定

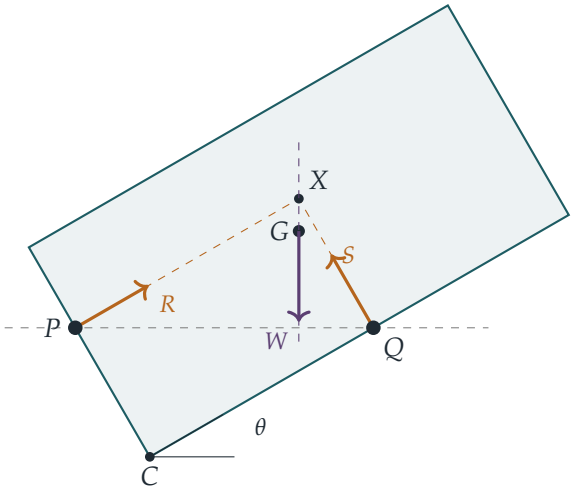
薄板を、重さ W、中心 G の一様な剛体の長方形とみなし、ペグを同じ高さにあるなめらかな点 P と Q とみなす。最も低い頂点を C とする。C を通る長さ $2a$ の辺が P に載っており、$CP = p$ である。また C を通る長さ $2b$ の辺が Q に載っており、$CQ = q$ である。$2b$ の辺は水平と鋭角 θ をなすので、それに垂直な $2a$ の辺は鉛直と角 θ をなす。

辺に沿った座標を使うのが最も簡単である。C から、$2b$ の辺に沿って u を、$2a$ の辺に沿って v を測る。すると

$$C = (0,0), \qquad P = (0,p), \qquad Q = (q,0), \qquad G = (b,a).$$

点 (u,v) の C からの水平方向および鉛直方向の変位は

$$x = u\cos\theta - v\sin\theta, \qquad y = u\sin\theta + v\cos\theta.$$



抗力の作用線は G を通る鉛直線上で交わる

P における抗力 R は $2a$ の辺に垂直なので、$2b$ の辺に平行である。すなわち、その作用線は $v = p$ である。同様に、Q における抗力 S は $u = q$ に沿ってはたらく。これらの直線は $X = (q, p)$、すなわち長方形 $CPXQ$ の第四の頂点で交わる。

X のまわりのモーメント（moment）を考えると、二つの抗力のモーメントは 0 なので、重力のモーメントも 0 でなければならない。つまり、G を通る鉛直線は X を通る。言い換えれば、X と G の水平座標は等しい：

$$q\cos\theta - p\sin\theta = b\cos\theta - a\sin\theta, \qquad \text{すなわち、} \qquad (q-b)\cos\theta = (p-a)\sin\theta. \quad (1)$$

（力を分解（resolving）すると $R = W\sin\theta$、$S = W\cos\theta$ が得られ、どちらも正であるから、ペグは実際にこれらの力を与えることができる。）

第一の結果

$0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ であるから、$\cos\theta$ と $\sin\theta$ はともに正である。よって (1) より、$q - b$ と $p - a$ は同符号である。$p < a$ ならば (1) の右辺は負なので $q - b < 0$、すなわち $q < b$ である。これが求める結果である。頂点が $2a$ の辺上のペグから a 未満の距離にあれば、もう一方のペグからは b 未満の距離にある。

考えてみよう なぜここで問題が終わらないのだろうか。d はどこで関わってくるのだろうか。

式 (1) はモーメントの条件しか使っていない。まだ d については何も述べておらず、しかも p と q は独立ではない。ペグは同じ高さにあり、互いに d だけ離れているからである。ここで、この二つの事実を取り入れる。

d との関係

ペグは同じ高さにあるので、P と Q の y 座標は等しい：

$$p\cos\theta = q\sin\theta, \qquad \text{よって} \qquad p = q\tan\theta. \tag{2}$$

両者の水平方向の距離は d である：

$$d = x_Q - x_P = q\cos\theta + p\sin\theta = q\cos\theta + \frac{q\sin^2\theta}{\cos\theta} = \frac{q}{\cos\theta}. \tag{3}$$

（同じことであるが、CPQ は C を直角とする直角三角形で、斜辺 $PQ = d$ が水平なので、$q = d\cos\theta$、$p = d\sin\theta$ である。）

ここで、(1) の第一の形の左辺に $q = d\cos\theta$ と $p = d\sin\theta$ を代入すると

$$\begin{aligned} b\cos\theta - a\sin\theta &= q\cos\theta - p\sin\theta \\ &= d\cos^2\theta - d\sin^2\theta \\ &= d\cos 2\theta, \end{aligned}$$

となり、これが求める結果である。

検算

- 正方形の場合 $a = b$、$\theta = \frac{\pi}{4}$：両辺はともに 0 である。対称性により対角線 CG は鉛直なので、これは矛盾しない。また、正方形を対称に置いたときに当然そうあるべきように、この式はすべての d に対して成り立つ。
- $a = 1$、$b = 2$、$\theta = \frac{\pi}{6}$ のとき、つり合うためには $q = d\cos\theta$ かつ $d = (b\cos\theta - a\sin\theta)/\cos 2\theta \approx 2.4641$ が必要である。このとき $p \approx 1.2321 > a$、$q \approx 2.1340 > b$ となり、(1) と矛盾しない。$R = W\sin\theta$、$S = W\cos\theta$ として G のまわりのモーメントをとると 0 になる。
- 数値的に、10^5 個を超えるランダムなつり合いの状態（ペグが辺上にあるようなランダムな a、b、θ）がすべて 10^{-14} 以内の誤差でこの恒等式を満たし、「$p < a \Rightarrow q < b$」に反する例は一つもなかった。

よくある間違い

- ペグからの抗力を鉛直と考えてしまうこと。なめらかな接触面からの力は、地面に垂直ではなく、**接触面**（ここでは薄板の辺）に垂直にはたらく。
- どの辺が水平と角 θ をなすのかを取り違えること。$2a$ の辺は**鉛直**と角 θ をなす。

STEP のその先へ

三力の原理は、剛体の静力学（statics）の一般論の特別な場合である。力の系がつり合うのは、合力と、任意の一点のまわりの合モーメントがともに 0 になるとき、かつそのときに限る。大学では、これはレンチ（wrench）や仮想仕事（virtual work）の言葉で語られるようになる。仮想仕事の方法では、薄板がペグとの接触を保つという条件のもとで G の高さを最小化することにより、このつり合いの位置を求めることになる。Kleppner と Kolenkow の *An Introduction to Mechanics*（力学入門）は、剛体の静力学とトルク（torque）を丁寧に扱っている。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。