解答例

STEP II 1989、第 11 問

力学 ・ 連結された質点と力積

> **STEP II 1989、問 11**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/89-s2-q11

鍵となる考え方

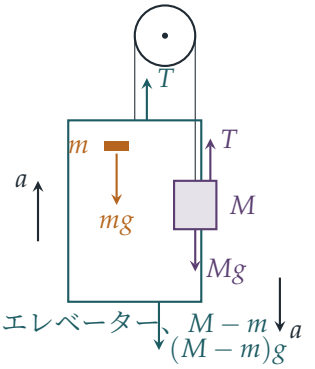
はじめにエレベーター（lift）と釣り合いおもり（counterweight）は釣り合っているので、エレベーターの質量 M にはタイルが含まれていなければならない。タイルが外れると、エレベーターは釣り合いおもりより軽くなって上向きに加速し、一方タイルは自由落下するので、床がタイルを迎えに上昇していくことになる。衝突については、エレベーター、ケーブル、釣り合いおもりをケーブルに沿って動く一つの系として扱う。この系の「ケーブルに沿った運動量（momentum）」は重力によってのみ変化し、衝突による力積（impulse）は系の内部のものである。

解答

モデルの設定

エレベーター、釣り合いおもり、タイルを質点とみなし、ケーブルは軽く伸び縮みしない（inextensible）ものとし、なめらかで軽い滑車にかかっているとする。ガイドはなめらかなので、鉛直方向の力は及ぼさない。タイルが落ちる前、系は両側の質量が M と M の状態で静止している。したがって、エレベーターの質量 M はタイルを含んでいる。（もし含んでいなければ、エレベーター側の重さは $(M+m)g$ となって Mg と釣り合わず、静止していられない。）

タイルが外れた後、エレベーターの質量は $M-m$、釣り合いおもりの質量は M であり、タイルは自由な質点となる。



床に届くまでの時間

エレベーターが上向きに加速度 a で加速するとすると、釣り合いおもりは下向きに a で加速する。ケーブルの張力（tension）を T とする。ニュートンの第二法則（Newton's second law）より

$$\begin{aligned} \text{エレベーター（上向き）：} &\quad T-(M-m)g=(M-m)a, \\ \text{釣り合いおもり（下向き）：} &\quad Mg-T=Ma. \end{aligned}$$

二つの式を足すと T が消去され、

$$a=\frac{mg}{2M-m}, \qquad T=M(g-a)=\frac{2M(M-m)g}{2M-m}>0,$$

となるので、ケーブルはたるまない。

> **考えてみよう** なぜ単に「タイルは重力のもとで距離 h だけ落下する」と言えないのか？

床も動いているからである。タイルは下向きに g で、床は上向きに a で、どちらも静止状態から加速する。したがって、すき間は一定の相対加速度

$$g+a=g+\frac{mg}{2M-m}=\frac{2Mg}{2M-m}.$$

で縮まっていく。すき間ははじめ h なので、タイルが着地するのは $\frac{1}{2}(g+a)t^2=h$ となるときであり、これより

$$t^2=\frac{2h}{g+a}=\frac{(2M-m)h}{Mg}, \qquad t=\sqrt{\frac{(2M-m)h}{Mg}}.$$

これは問題文に印刷された式ではない。印刷された式では $2M-m$ の代わりに $2(M-m)$ となっている。二つが一致するのは $m=0$ のときだけであり、我々の値は後で運動を数値的に追跡することで確認する。印刷された形になるには、エレベータ

ーの加速度が $mg/(M-m)$ でなければならない。これは、釣り合いおもりも加速させなければならないことを忘れ、張力が Mg のままであるとみなした場合に得られる値である。印刷された式は、元の問題の誤植か誤りであると考えられる。問題の残りの部分はこれに依存しない。

衝突

衝突の直前、エレベーターは上向きに、釣り合いおもりは下向きに、どちらも速さ $u=at$ で動いている。タイルは下向きに速さ $v=gt$ で動いている。すると

$$(2M-m)u=(2M-m)\cdot\frac{mg}{2M-m}\,t=mgt=mv.$$

では衝突を考えよう。エレベーターが上向き・釣り合いおもりが下向きとなる向き、すなわちケーブルが両者を一緒に運ぶ向きを「正」とする。衝突はごく短時間なので、有限の力（重力）による力積は無視できる。力積は、エレベーターとタイルの内部のものであるタイルと床の間の力積と、ケーブルの撃力的な張力 J だけである。衝突後の共通の速さを w とする（エレベーターとタイル、質量 M は上向き、釣り合いおもりは下向き）。衝突は完全非弾性衝突（perfectly inelastic collision）なので、タイルは最終的に床と一緒に動く。すると

$$\begin{aligned}\text{エレベーターとタイル：}\quad & Mw-[(M-m)u-mv]=J,\\ \text{釣り合いおもり：}\quad & Mw-Mu=-J.\end{aligned}$$

これらを足すと

$$2Mw=(M-m)u+Mu-mv=(2M-m)u-mv=0,$$

したがって $w=0$ であり、エレベーターは静止する。（また $J=Mu>0$ なので、ケーブルはたるむのではなく実際にぴんと引っ張られ、仮定と矛盾しない。）衝突後は質量が再び M と M になって釣り合うので、すべてが静止したままである。

> **考えてみよう** なぜ衝突直前の「ケーブルに沿った運動量」の総和はゼロなのか？

衝突前、三つの物体に働く外力のうち運動の方向に沿うものは重力だけであり、上で定めた正の向きでの正味の効果は $Mg-(M-m)g-mg=0$ である。（滑車からの抗力は仕事をせず、ケーブルは内部のものである。）したがって、この運動量は常に初期値 0 のままである。衝突もこれを変えることはできない。

失われるエネルギー

系は静止状態から始まり静止状態で終わるので、失われる力学的エネルギーは、始めと終わりの間の重力による位置エネルギー（potential energy）の減少量に等しい。落

下の間にエレベーターが s_1 上昇し（したがって釣り合いおもりは s_1 下降し）、タイルが s_2 落下したとする。タイルは h のすき間を埋めるので $s_1 + s_2 = h$ である。位置エネルギーの変化は

$$(M-m)g\,s_1 - Mg\,s_1 - mg\,s_2 = -mg(s_1+s_2) = -mgh.$$

衝突後は何も動かないので、失われるエネルギーは求めるとおり mgh である。衝突直前にあった運動エネルギー（kinetic energy）はすべて衝突で失われる。この議論では t の値をまったく使っていないことに注意しよう。

検算

- $m \to 0$ とすると、$a \to 0$ かつ $t \to \sqrt{2h/g}$ となり、これは静止した床への自由落下である。どちらの式もこのテストに合格するので、これでは両者を区別できない。
- $M = 5$、$m = 1$、$h = 1$、$g = 9.8$ として運動を数値的に追跡すると $t \approx 0.4286\,\mathrm{s}$ となり、$\sqrt{9/49} \approx 0.4286$ と一致する。印刷された式では $\sqrt{8/49} \approx 0.404\,\mathrm{s}$ となる。
- 同じシミュレーションで、衝突直前の運動エネルギーは有効数字 5 桁まで mgh に等しく、衝突後の速さは丸め誤差の範囲でゼロである。

よくある間違い

- エレベーターの質量を M にタイルを**加えた**ものとしてしまう。そうすると系は静止状態から始まることができない。
- 釣り合いおもりの慣性（inertia）を忘れ、エレベーターの加速度が $mg/(M-m)$ となってしまう。
- 衝突において、エレベーターとタイルだけで線形運動量保存則を使い、ケーブルの撃力的な張力を無視してしまう。

STEP のその先へ

ここで用いた「ケーブルに沿った運動量」は**一般化運動量**（generalised momentum）である。自由度（degree of freedom）が 1 の系で、座標は滑車を通過したケーブルの長さである。ラグランジュ力学（Lagrangian mechanics）はこれを体系化する。力が正味の効果をもたない座標のそれぞれに対して保存される一般化運動量が対応し、撃力的な拘束も同じように扱われる。Kleppner and Kolenkow, *An Introduction to Mechanics*（力学入門）は、糸と滑車でつながれた系や、衝突における力積とエネルギーを丁寧に

扱っている。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。