解答例

STEP II 1989、第 10 問

純粋数学 ・ 直線と平面

> **STEP II 1989、問 10**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/89-s2-q10

鍵となる考え方

空間内の 2 直線がただ 1 点で交わらない場合は 3 通りある。同一の直線である場合、平行である場合、そして異なる平面上にあって互いにすれ違うねじれの位置（skew）にある場合である。したがって「ちょうど 1 点」であるためには 2 つの条件が必要である。すなわち、方向が平行でないことと、2 直線が共通の平面上にあることである。外積（cross product）を用いると、この両方を一度に扱える。平面については、交線は法線ベクトル（normal）の外積の方向に伸びており、最後の小問は形を変えた最初の小問にほかならない。

解答

前半：2 直線がちょうど 1 点で交わるのはいつか

2 直線は $\mathbf{a}+\lambda\mathbf{u}=\mathbf{b}+\mu\mathbf{v}$ となるところ、すなわち

$$\lambda\mathbf{u}-\mu\mathbf{v}=\mathbf{b}-\mathbf{a}.$$

となるところで交わる。これらが本当に直線であるためには $\mathbf{u}\neq\mathbf{0}$ かつ $\mathbf{v}\neq\mathbf{0}$ でなければならない。そのうえで次のようになる。

- $\mathbf{u}$ と $\mathbf{v}$ が平行（$\mathbf{u}\times\mathbf{v}=\mathbf{0}$）ならば、2 直線は平行で異なる（共有点なし）か、一致する（共有点は無数）かのいずれかである。どちらの場合も、ちょうど 1 点ではない。
- $\mathbf{u}\times\mathbf{v}\neq\mathbf{0}$ ならば、$\mathbf{u}$ と $\mathbf{v}$ は 1 つの平面を張り、上の方程式が解をもつのは、$\mathbf{b}-\mathbf{a}$ がその平面内にあるとき、すなわち $\mathbf{u}\times\mathbf{v}$ に垂直であるときに限る。解が存在すれば、$\mathbf{u}$ と $\mathbf{v}$ が 1 次独立（independent）であるから、その解はただ 1 つである。

よって条件は

$$\mathbf{u} \neq \mathbf{0}, \quad \mathbf{v} \neq \mathbf{0}, \quad \mathbf{u} \times \mathbf{v} \neq \mathbf{0}, \quad (\mathbf{b} - \mathbf{a}) \cdot (\mathbf{u} \times \mathbf{v}) = 0.$$

である。（最初の 2 つは 3 つ目から導かれるが、明記しておく価値はある。）最後の条件が成り立たなければ、2 直線はねじれの位置にある。

中盤：2 つの平面

法線ベクトルは $\mathbf{n}_1 = (1, 1, b)$ と $\mathbf{n}_2 = (b, b, 1)$ であり、

$$\mathbf{n}_1 \times \mathbf{n}_2 = \left(1 - b^2,\ b^2 - 1,\ 0\right) = (1 - b^2)(1, -1, 0).$$

である。2 平面が直線で交わらないのは、法線ベクトルが平行であるときに限り、ここでは $1 - b^2 = 0$ のとき、つまり $b = 1$ または $b = -1$ のときである。

- $b = 1$：どちらの方程式も $x + y + z = 3$ となる。
- $b = -1$：方程式は $x + y - z = 1$ と $-x - y + z = -1$ であり、これもまた同じ平面である。

したがって、どちらの場合も 2 平面は平行で離れているのではなく、一致する。

次に $b \neq \pm 1$ とする。交線は $\mathbf{n}_1 \times \mathbf{n}_2$ の方向に伸びるので、$\mathbf{u} = (1, -1, 0)$ を用いることができる。交線上の点を求めるために、x と y は $s = x + y$ の形でしか現れないことに注目する。

$$s + bz = b + 2, \qquad bs + z = 2b + 1.$$

第 2 式から第 1 式の b 倍を引くと $(1 - b^2)z = 1 - b^2$ となるので $z = 1$ であり（$b^2 \neq 1$ であるから割ってよい）、このとき $s = 2$ である。したがって交線は $x + y = 2, z = 1$ であり、b によらない。

この直線上の点 $\mathbf{a}$ で、$\mathbf{a} \cdot \mathbf{u} = 0$、すなわち $x - y = 0$ を満たすものが必要である。$x + y = 2$ と合わせると $x = y = 1$ となるので、

$$\mathbf{r} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad b \neq \pm 1.$$

である。点 $\mathbf{a}$ は原点からこの直線に下ろした垂線の足である。

最後の小問

両方の方程式 $(*)$ を満たす座標をもつ点全体は、$b \neq \pm 1$ のときは上の直線となり、$b = \pm 1$ のときは平面全体となる。場合を分けて扱う。

考えてみよう $b=\pm1$ のとき、両方の方程式を満たす点全体はどのような集合か？

2 平面が一致することがわかっているので、それは空集合ではなく平面全体である。このことにより、これらの場合の答えはまったく変わってくる。

$b\neq\pm1$ の場合。 与えられた直線が、直線 $\mathbf{r}=(1,1,1)+\lambda(1,-1,0)$ とちょうど 1 点で交わる必要がある。前半の結果を $\mathbf{a}=(1,1,1)$, $\mathbf{u}=(1,-1,0)$, $\mathbf{b}=(0,0,c)$, $\mathbf{v}=(1,d,0)$ として適用する。すると

$$\mathbf{u}\times\mathbf{v}=(0,\,0,\,d+1),\qquad(\mathbf{b}-\mathbf{a})\cdot(\mathbf{u}\times\mathbf{v})=(-1,-1,c-1)\cdot(0,0,d+1)=(c-1)(d+1).$$

となる。$\mathbf{u}\times\mathbf{v}\neq\mathbf{0}$ が必要なので $d\neq-1$ であり、このとき $(c-1)(d+1)=0$ から $c=1$ が導かれる。よって条件は $c=1$ かつ $d\neq-1$ である。（直接確かめると、与えられた直線上では $z=c$ であるから、$z=1$ と交わるのは $c=1$ のときに限り、そのとき $x+y=\mu(1+d)=2$ は $d\neq-1$ ならばただ 1 つの解 $\mu=2/(1+d)$ をもつ。）

$b=\pm1$ の場合。 今度は、与えられた直線が平面とちょうど 1 点で交わる必要がある。点 $(\mu,d\mu,c)$ が $x+y+z=3$（$b=1$ の場合）上にあるのは $\mu(1+d)=3-c$ のときであり、$x+y-z=1$（$b=-1$ の場合）上にあるのは $\mu(1+d)=1+c$ のときである。いずれの方程式も、μ についてちょうど 1 つの解をもつための必要十分条件は $1+d\neq0$ である。$d=-1$ ならば直線は平面に平行であり、解は存在しないか無数にある。この場合、c は任意である。

答え。 そのような点がちょうど 1 つ存在するための必要十分条件は

$$d\neq-1\quad\text{かつ}\quad\big(c=1\text{ または }b=\pm1\big),$$

であり、簡潔に書けば $d\neq-1$ かつ $(b^2-1)(c-1)=0$ である。

検算

- $(1+\lambda,1-\lambda,1)$ を $(*)$ に代入すると、すべての b と λ について $2+b=b+2$ および $2b+1=2b+1$ となる。
- $b=2,c=1,d=3$ のとき、点は $\mu=\frac{1}{2}$、すなわち $(\frac{1}{2},\frac{3}{2},1)$ であり、$\frac{1}{2}+\frac{3}{2}+2=4=b+2$ かつ $1+3+1=5=2b+1$ となる。
- コンピュータを用いて、$\{-3,\ldots,3,\frac{1}{2},-\frac{5}{3}\}$ に属するすべての b,c,d（729 通り）について、厳密な算術で μ を直接解いて調べたところ、解の個数が 1 になるのは、述べた条件が成り立つときに限られた。

よくある間違い

- 2 直線が平行でないというだけで、1 点で交わると述べてしまう。3 次元では、ねじれの位置にある場合がある。
- $b = \pm 1$ のとき 2 平面は平行で離れていると思い込み、点はまったく存在しないと結論してしまう。右辺を確認すること。2 平面は一致している。
- $1 - b^2$ が 0 でない理由を述べずに、$1 - b^2$ で割ってしまう。

STEP のその先へ

これは形を変えた小さな連立 1 次方程式（system of linear equations）である。3 つの未知数に関する 2 つの方程式は、係数行列の階数（rank）が 2 のときは解全体が直線となり、階数が 1 のときは平面（または空集合）となる。これに直線の媒介変数表示を加えると、μ に関する方程式の個数が未知数より多い優決定系（overdetermined system）となり、「ちょうど 1 つの解をもつ」というのは階数と解の存在（無矛盾性）に関する主張となる。ストラング（Strang）の *Introduction to Linear Algebra*（線形代数入門）は、ここに現れる行の見方（平面の交わり）と列の見方（ベクトルの 1 次結合）から、これらすべてを組み立てている。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。