解答例

STEP II 1989、第 1 問

純粋数学 • 3 次方程式の三角関数による解法

> **STEP II 1989、問 1**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/89-s2-q1

鍵となる考え方

この恒等式（identity）は、$z = \cos\theta$ のとき $4z^3 - 3z$ が実は $\cos 3\theta$ が姿を変えたものにすぎないことを述べている。したがって、3 次方程式（cubic）を $|k| \leq 1$ である $4z^3 - 3z = k$ という形に押し込むことができれば、それを解くことは $\cos 3\theta = k$ を解くことと同じであり、こちらには簡単に求まる三つの解がある。二つの置換（substitution）はそれぞれ別の役割を果たす。平行移動 $y = x + a$ は 2 乗の項を消し、拡大縮小 $z = by$ は残った係数（coefficient）の比を 4 : 3 に合わせる。

解答

恒等式

加法定理（addition formulae）と $\sin^2\theta = 1 - \cos^2\theta$ を用いると、

$$\begin{aligned}\cos 3\theta &= \cos 2\theta\cos\theta - \sin 2\theta\sin\theta \\ &= (2\cos^2\theta - 1)\cos\theta - 2\sin^2\theta\cos\theta \\ &= 2\cos^3\theta - \cos\theta - 2(1 - \cos^2\theta)\cos\theta \\ &= 4\cos^3\theta - 3\cos\theta,\end{aligned}$$

となり、示すべき式が得られる。

3 次方程式の変形

$y = x + a$ とおくと $x = y - a$ であり、$24(y-a)^3 - 72(y-a)^2 + \cdots$ における y^2 の係数は $-72a - 72$ である。これを消すには $a = -1$、すなわち $x = y + 1$ とすればよい。こ

のとき

$$\begin{aligned}&24(y+1)^3-72(y+1)^2+66(y+1)-19\\&\quad=(24y^3+72y^2+72y+24)-(72y^2+144y+72)\\&\qquad+(66y+66)-19\\&\qquad\qquad=24y^3-6y-1,\end{aligned}$$

であるから、$(*)$ は

$$24y^3-6y=1.$$

となる。次に $y=z/b$ とおくと

$$\frac{24}{b^3}z^3-\frac{6}{b}z=1.$$

考えてみよう 左辺が $4z^3-3z$ の定数倍になるようにするには、b をどう選べばよいか。

z^3 と z の係数の比が $4:-3$ となる必要があるので、

$$\frac{24/b^3}{6/b}=\frac{4}{3}\quad\Longrightarrow\quad\frac{4}{b^2}=\frac{4}{3}\quad\Longrightarrow\quad b^2=3.$$

$b=\sqrt{3}$ をとる。すると方程式は $\dfrac{8}{\sqrt{3}}z^3-\dfrac{6}{\sqrt{3}}z=1$ となり、両辺に $\frac{\sqrt{3}}{2}$ を掛けて

$$4z^3-3z=\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

を得る。よって $a=-1$、$b=\sqrt{3}$、$k=\frac{\sqrt{3}}{2}$ であり、$z=\sqrt{3}\,(x-1)$ である。（代わりに $b=-\sqrt{3}$ をとると $k=-\frac{\sqrt{3}}{2}$ となるが、最終的には同じ解が得られる。）

解

$|k|\le 1$ であるから $z=\cos\theta$ と書くことができ、恒等式により方程式は

$$\cos 3\theta=\frac{\sqrt{3}}{2}=\cos 30^\circ.$$

となる。よって $3\theta=30^\circ,\,390^\circ,\,750^\circ$ であり、$\theta=10^\circ,\,130^\circ,\,250^\circ$ を得る。これらは互いに異なる三つの $\cos\theta$ の値を与え、3 次方程式の解は高々三つであるから、これですべての解が尽くされる：

$$z=\cos 10^\circ,\quad\cos 130^\circ,\quad\cos 250^\circ.$$

置換をもとに戻すと $x = 1 + \dfrac{z}{\sqrt{3}}$ であるから、

$$x_1 = 1 + \frac{\cos 10^\circ}{\sqrt{3}} = 1.5686\ldots \approx 1.57,$$
$$x_2 = 1 + \frac{\cos 130^\circ}{\sqrt{3}} = 0.6289\ldots \approx 0.629,$$
$$x_3 = 1 + \frac{\cos 250^\circ}{\sqrt{3}} = 0.8025\ldots \approx 0.803.$$

すべての 3 次方程式でうまくいくわけではない

一般のモニック（monic、最高次の係数が 1）な 3 次方程式 $x^3 + \alpha x^2 + \beta x + \gamma = 0$ に対しては、平行移動の量は一意に決まる。$x = y - a$ とした後の y^2 の係数は $\alpha - 3a$ であるから $a = \frac{\alpha}{3}$ であり、$p = \beta - \frac{\alpha^2}{3}$ として $y^3 + py + q = 0$ に到達する。$y = z/b$ とおいて $4b^3$ を掛けると

$$4z^3 + 4pb^2 z + 4qb^3 = 0,$$

となり、これを $4z^3 - 3z$ に合わせるには $4pb^2 = -3$、すなわち $b^2 = -\dfrac{3}{4p}$ でなければならない。これが実数解をもつのは $p < 0$ のときに限る。

反例（counterexample）として

$$x^3 + 3x - 4 = 0.$$

がある。ここでは $\alpha = 0$ なので $a = 0$、$p = 3 > 0$ である。$b^2 = -\frac{1}{4}$ が必要になるが、これを満たす実数 b は存在しない。したがってこの方程式は $4z^3 - 3z = k$ の形にはまったく変形できない。（方程式自体は解をもつ。$(x-1)(x^2+x+4) = 0$ と因数分解でき、2 次式の判別式（discriminant）は $-15 < 0$ であるから、$x = 1$ がただ一つの実数解である。うまくいかないのは解法であって、方程式ではない。）

$p < 0$ であっても、次の段階で解法が破綻することがある。$x^3 - 3x - 4 = 0$ に対して $x = 2z$ とおくと $4z^3 - 3z = 2$ となるが、$|\cos 3\theta| \le 1$ であるから、$\cos 3\theta = 2$ を満たす実数 θ は存在しない。

検算

- 三つの解の和は $\frac{72}{24} = 3$、積は $\frac{19}{24}$ になるはずである。実際、cos の項の和は 0 であり（$\cos 10^\circ + \cos 130^\circ + \cos 250^\circ = 0$）、数値的には $1.5686 \times 0.6289 \times 0.8025 = 0.7917 \approx \frac{19}{24}$ である。
- $x = 1.5686$ を $24x^3 - 72x^2 + 66x - 19$ に代入すると、電卓の精度の範囲で 0 になる。他の二つの解についても同様である。

よくある間違い

- $\theta = 10^\circ$ で止めてしまうこと。残りの二つの解は $3\theta = 390^\circ$ と 750° から得られる。
- a の符号を間違えること。$y = x + a$ かつ $x = y + 1$ ということは $a = -1$ であり、$+1$ ではない。
- 反例として、$p < 0$ かつ $|k| \le 1$ である 3 次方程式を選んでしまうこと。そのような方程式はこの解法で問題なく扱える。うまくいかないと主張する前に、$b^2 > 0$ と $|k| \le 1$ を確認すること。

STEP のその先へ

この解法がうまくいくのは、ちょうど 3 次方程式が三つの実数解をもつときであり、これは「還元不能の場合」（casus irreducibilis）と呼ばれる。この場合、答えはすべて実数であるにもかかわらず、カルダノ（Cardano）の公式では複素数の立方根を経由せざるを得ない。$|k| > 1$ のときは、$\cosh 3u = 4\cosh^3 u - 3\cosh u$ であるから、cos の代わりに cosh を用いて同じ考え方が使える。$x^3 - 3x - 4 = 0$ に対しては、これにより実数解 $x = 2\cosh\left(\frac{1}{3}\operatorname{arcosh} 2\right) \approx 2.196$ が得られる。そもそもどの多項式方程式が冪根（radicals）によって解けるのかという、より深い問いはガロア理論（Galois theory）へとつながる。入門には Allenby, *Rings, Fields and Groups*（環・体・群の入門書）がよく、Needham, *Visual Complex Analysis*（複素解析を図形的に解説した本）は立方根の幾何学的な姿を見せてくれる。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。