解答例

STEP I 1989、第 9 問

純粋数学 ・ グラフの変換

> **STEP I 1989、問 9**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/89-s1-q9

鍵となる考え方

基本となる三次関数（cubic）のグラフを一度描いてしまえば、他のグラフはすべて、同じ曲線を座標変換を通して見たものにすぎない。置換 $X = ax + b, Y = cy + d$ は、各方向への拡大・縮小（stretch）または反転（reflection）に続けて平行移動（translation）を施すだけのものであり、極値点（turning point）を極値点に移す。したがって、作業のすべては元の三次関数の 2 つの極値点を求め、それらがどこへ移るかを追跡することにある。

解答

基本のグラフ

$y = \frac{1}{8}(x^3 - 12x) = \frac{1}{8}x(x^2 - 12)$ とおく。すると

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{3x^2 - 12}{8} = \frac{3(x-2)(x+2)}{8}, \qquad \frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2} = \frac{6x}{8} = \frac{3x}{4}.$$

傾きは $x = \pm 2$ で 0 となる。

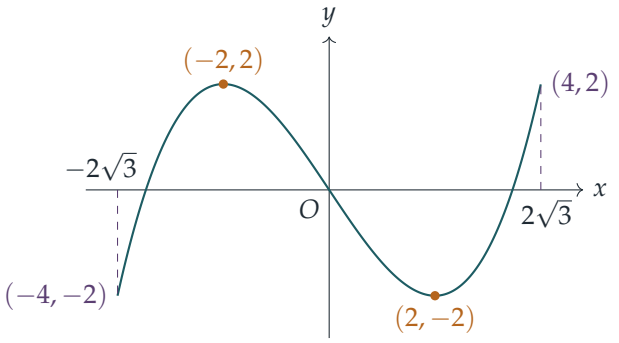
- $x = -2$ において：$y = \frac{1}{8}(-8 + 24) = 2$ であり、$y'' = -\frac{3}{2} < 0$ であるから、$(-2, 2)$ は極大（local maximum）である。
- $x = 2$ において：$y = \frac{1}{8}(8 - 24) = -2$ であり、$y'' = \frac{3}{2} > 0$ であるから、$(2, -2)$ は極小（local minimum）である。

その他の有用な特徴：

- 曲線が座標軸と交わるのは $x(x^2 - 12) = 0$ となるところ、すなわち $x = 0$ および

$x = \pm 2\sqrt{3} \approx \pm 3.46$ である。

- この関数は奇関数（odd function）であるから、グラフは原点に関して位数 2 の回転対称性をもつ。原点は変曲点（point of inflection）でもあり、そこでの傾きは $-\frac{3}{2}$ である。
- 両端では $y(4) = \frac{1}{8}(64 - 48) = 2$、$y(-4) = -2$ である。つまり曲線は、ちょうど $x = 4$ で極大値の高さまで戻ってくる。



なぜ極値点は極値点に移るのか

考えてみよう 座標を変換したとき、新しい極値点が元の極値点の像にすぎないことは、どうしてわかるのだろうか。

$a, c \neq 0$ として $X = ax + b$、$Y = cy + d$ とすると、連鎖律（chain rule）により

$$\frac{\mathrm{d}Y}{\mathrm{d}X} = \frac{\mathrm{d}Y/\mathrm{d}x}{\mathrm{d}X/\mathrm{d}x} = \frac{c}{a}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x},$$

であり、これは $\mathrm{d}y/\mathrm{d}x$ が 0 となるところでちょうど 0 となる。したがって新しい極値点は $(-2, 2)$ と $(2, -2)$ の像である（$c/a < 0$ ならば図は反転し、極大と極小の役割が入れ替わる）。幾何学的には次のとおりである。

- $X = \frac{1}{2}x$ はグラフを横方向に 2 分の 1 に縮める。
- $Y = \frac{1}{2}y$ はグラフを縦方向に 2 分の 1 に縮める。
- さらに X または Y に 1 を加えると、グラフは右または上に 1 だけ平行移動する。

変換された 4 つのグラフ

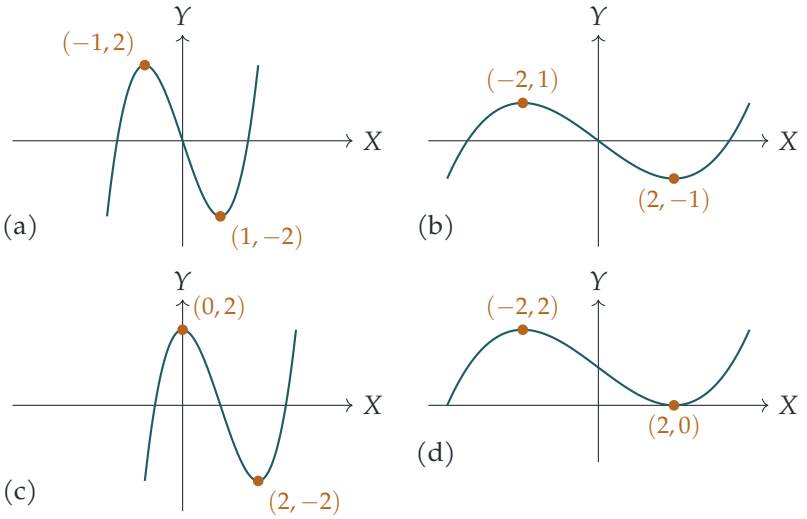
それぞれの写像を $(-2, 2)$、$(2, -2)$ および範囲 $-4 \leq x \leq 4$ に適用すると：

(a) $X = \frac{1}{2}x, Y = y$：極大 $(-1, 2)$、極小 $(1, -2)$、範囲は $-2 \leq X \leq 2$。曲線は $Y = X^3 - 3X$ である。

(b) $X = x,\ Y = \frac{1}{2}y$：極大 $(-2,1)$、極小 $(2,-1)$、範囲は $-4 \leq X \leq 4$。曲線は $16Y = X^3 - 12X$ である。

(c) $X = \frac{1}{2}x + 1,\ Y = y$：極大 $(0,2)$、極小 $(2,-2)$、範囲は $-1 \leq X \leq 3$。これはグラフ (a) を右に 1 だけ平行移動したもので、変曲点は $(1,0)$ である。

(d) $X = x,\ Y = \frac{1}{2}y + 1$：極大 $(-2,2)$、極小 $(2,0)$、範囲は $-4 \leq X \leq 4$。これはグラフ (b) を上に 1 だけ平行移動したもので、変曲点は $(0,1)$ である。極小点で X 軸に接する。



最後の小問

$a, c \neq 0$ が必要であり（そうでなければグラフは直線につぶれてしまう）、そのとき新しいグラフの極値点は

$$(-2a + b,\ 2c + d) \quad と \quad (2a + b,\ -2c + d).$$

である。これらが順序はともかく $(0,0)$ と $(1,1)$ でなければならないので、2 組の連立一次方程式が得られる。

場合 1：$(-2,2) \mapsto (0,0)$ かつ $(2,-2) \mapsto (1,1)$ のとき。$-2a + b = 0$ かつ $2a + b = 1$ より $b = \frac{1}{2}$、$a = \frac{1}{4}$。また $2c + d = 0$、$-2c + d = 1$ より $d = \frac{1}{2}$、$c = -\frac{1}{4}$。

場合 2：$(-2,2) \mapsto (1,1)$ かつ $(2,-2) \mapsto (0,0)$ のとき。同様にして $a = -\frac{1}{4}$、$b = \frac{1}{2}$、$c = \frac{1}{4}$、$d = \frac{1}{2}$。

よって答えの 1 つは

$$a = \frac{1}{4}, \quad b = \frac{1}{2}, \quad c = -\frac{1}{4}, \quad d = \frac{1}{2},$$

であり、もう 1 つは $a=-\frac{1}{4}$、$b=\frac{1}{2}$、$c=\frac{1}{4}$、$d=\frac{1}{2}$ である。

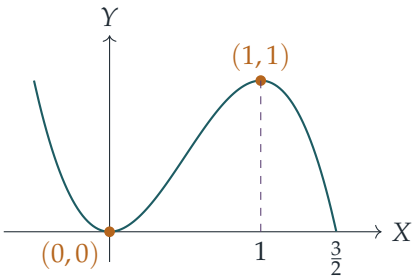
新しい曲線を求めておく価値がある。場合 1 では $x=4X-2$、$y=2-4Y$ であるから

$$\begin{aligned}8(2-4Y) &= (4X-2)^3-12(4X-2)\\ &= 64X^3-96X^2+48X-8-48X+24\\ &= 64X^3-96X^2+16,\end{aligned}$$

となり、これを整理すると

$$Y=3X^2-2X^3=X^2(3-2X).$$

となる。このとき $Y'=6X(1-X)$ であるから、極値点は確かに $(0,0)$ での極小と $(1,1)$ での極大である。場合 2 もまったく同じ曲線を与える。三次関数が奇関数であるため、(x,y) を $(-x,-y)$ に置き換えても元のグラフは変わらず、2 つの場合の違いはそれだけだからである。



$-4\le x\le 4$ に対して、この曲線は $(-\frac{1}{2},1)$ から $(\frac{3}{2},0)$ まで延びる。

検算

- $Y=3X^2-2X^3$ に $X=0$ と $X=1$ を代入すると 0 と 1 が得られ、$Y'=6X(1-X)$ はどちらでも 0 となる。
- 変換された各グラフは、範囲の端で曲線が極値点の高さに戻るという元の特徴を保っている。たとえば (d) では、$X=4$ で $Y=2$、$X=-4$ で $Y=0$ である。
- 数値的には、$x=1$ のとき $y=-\frac{11}{8}$ である。場合 1 ではこれは $X=0.75$、$Y=0.84375$ を与え、実際 $3(0.75)^2-2(0.75)^3=0.84375$ である。

よくある間違い

- 拡大・縮小の向きを取り違えること：$X=\frac{1}{2}x$ はグラフを**狭く**するのであって、広くするのではない。$x=2$ にある点が $X=1$ に移るからである。

- 定義域（domain）も変換し忘れること：グラフ (c) の範囲は $-1 \leq X \leq 3$ であり、$-4 \leq X \leq 4$ ではない。
- 極値点のもう一方の対応のさせ方に気づかず、最後の小問に解を 1 つしか答えないこと（どちらか一方で十分ではあるが、最初の場合で $c < 0$ となることは見落としやすい）。

STEP のその先へ

写像 $X = ax + b, Y = cy + d$ はアフィン変換（affine transformation）であり、最後の小問は、2 つの極値点をもつ任意の三次関数のグラフが、そのような変換の 1 つによって標準的な曲線 $Y = 3X^2 - 2X^3$ に移せることを示している。これはコンピュータグラフィックスで使われる「smoothstep」関数である。このように変換群を法として曲線を分類することは、幾何学と線形代数を貫くテーマである。行列の側からの話については、ストラング（Strang）の *Introduction to Linear Algebra*（線形代数入門）を参照せよ。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。