解答例

STEP I 1989、第 8 問

純粋数学 ・ 倍角の公式

STEP I 1989、問 8

先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：

step.maths.org/questions/89-s1-q8

鍵となる考え方

ド・モアブル(de Moivre)の定理(de Moivre's theorem)により、$\cos n\theta$ は $(\cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta)^n$ の実部（real part）として表され、$\sin^2\theta$ を $1-\cos^2\theta$ で置き換えれば $\cos\theta$ の多項式(polynomial) が残る。最後の部分では、与えられた 6 次式 (sextic) が直前に求めた 2 つの多項式の組合せのように見えるので、その組合せを探す。実はそれは $\cos 6\theta - \cos 4\theta$ の半分であり、$\cos 6\theta = \cos 4\theta$ を解くのは易しい。

解答

以下を通して $c = \cos\theta$、$s = \sin\theta$ とおく。したがって $s^2 = 1 - c^2$ である。

小問 (i)

ド・モアブルの定理より $\cos 4\theta + \mathrm{i}\sin 4\theta = (c + \mathrm{i}s)^4$ である。二項定理（binomial theorem）で展開し、実数の項（$\mathrm{i}s$ の偶数乗を含む項）だけを残すと、

$$\begin{aligned}\cos 4\theta &= c^4 - \tbinom{4}{2}c^2s^2 + s^4 \\ &= c^4 - 6c^2(1-c^2) + (1-c^2)^2 \\ &= c^4 - 6c^2 + 6c^4 + 1 - 2c^2 + c^4 \\ &= 8c^4 - 8c^2 + 1,\end{aligned}$$

となり、これが求める恒等式である。

小問 (ii)

同様に、$(c+\mathrm{i}s)^6$ の実部から

$$\cos 6\theta = c^6 - 15c^4s^2 + 15c^2s^4 - s^6,$$

が得られる。ここで $\binom{6}{2} = \binom{6}{4} = 15$ および $\mathrm{i}^2 = -1$、$\mathrm{i}^4 = 1$、$\mathrm{i}^6 = -1$ を用いた。$u = c^2$ とおくと $s^2 = 1 - u$ であるから、

$$\begin{aligned}\cos 6\theta &= u^3 - 15u^2(1-u) + 15u(1-u)^2 - (1-u)^3 \\ &= u^3 - 15u^2 + 15u^3 + 15u - 30u^2 + 15u^3 - 1 + 3u - 3u^2 + u^3 \\ &= 32u^3 - 48u^2 + 18u - 1 \\ &= 32c^6 - 48c^4 + 18c^2 - 1,\end{aligned}$$

となり、題意が示された。

方程式

左辺を $p(x) = 16x^6 - 28x^4 + 13x^2 - 1$ とおく。

> **考えてみよう** どちらの恒等式とも一致しない多項式に対して、2 つの恒等式をどう役立てればよいだろうか？

係数を比較する（compare coefficients）。最高次の係数 16 は 32 の半分であり、定数項 -1 は -2 の半分である。これは (ii) から (i) を引くことを示唆している：

$$\cos 6\theta - \cos 4\theta = 32c^6 - 56c^4 + 26c^2 - 2 = 2\,p(c).$$

したがって $x = \cos\theta$ ならば

$$p(x) = 0 \iff \cos 6\theta = \cos 4\theta.$$

ここで $\cos A = \cos B$ となるのは、ある整数 k に対して $A = \pm B + 2k\pi$ となるときであり、そのときに限る。今の場合、これより

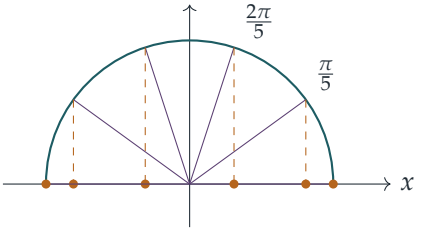
$$6\theta = 4\theta + 2k\pi \;\Rightarrow\; \theta = k\pi, \qquad \text{または} \qquad 6\theta = -4\theta + 2k\pi \;\Rightarrow\; \theta = \frac{k\pi}{5}.$$

第 1 の族は第 2 の族に含まれるので、解は $\theta = k\pi/5$ であり、対応する $x = \cos\theta$ の値は

$$\cos 0 = 1, \quad \cos\tfrac{\pi}{5}, \quad \cos\tfrac{2\pi}{5}, \quad \cos\tfrac{3\pi}{5} = -\cos\tfrac{2\pi}{5}, \quad \cos\tfrac{4\pi}{5} = -\cos\tfrac{\pi}{5}, \quad \cos\pi = -1.$$

である。k の他の値ではこれらが繰り返されるだけである。これらは 6 つの**相異なる**数であり（余弦は $[0,\pi]$ で狭義単調減少である）、p の次数は 6 であるから、これらが

実数・複素数を含めた p の根のすべてである。特に、置換 $x=\cos\theta$ では $-1\le x\le 1$ の範囲しか扱えないが、この区間の外の根を見落としてはいない。見つけるべき根はもう残っていないからである。



ただし、これはまだ答えとして十分ではない。数値による近似は認められず、余弦の値を正確に与えなければならないからである。$x=1$ が根であるから $x=-1$ も根であり（p は偶関数である）、x^2-1 が因数となる。割り算をする（あるいは係数を比較する）と

$$p(x)=(x^2-1)(16x^4-12x^2+1).$$

4 次の因数（quartic factor）は x^2 についての 2 次式である：

$$x^2=\frac{12\pm\sqrt{144-64}}{32}=\frac{12\pm4\sqrt{5}}{32}=\frac{3\pm\sqrt{5}}{8}.$$

ここで

$$\left(\frac{1+\sqrt{5}}{4}\right)^2=\frac{6+2\sqrt{5}}{16}=\frac{3+\sqrt{5}}{8},\qquad \left(\frac{\sqrt{5}-1}{4}\right)^2=\frac{6-2\sqrt{5}}{16}=\frac{3-\sqrt{5}}{8}.$$

であることに注意する。x^2 の値はどちらも正であるから、それぞれから x の実数値が 2 つずつ得られる。よって、方程式の実数解は次の 6 つの数である。

$$x=\pm1,\qquad x=\pm\frac{1+\sqrt{5}}{4},\qquad x=\pm\frac{\sqrt{5}-1}{4}.$$

おまけとして、上の一覧と大小を照らし合わせると（$\cos\frac{\pi}{5}>\cos\frac{2\pi}{5}>0$）、よく知られた値 $\cos\frac{\pi}{5}=\frac{1+\sqrt{5}}{4}$ および $\cos\frac{2\pi}{5}=\frac{\sqrt{5}-1}{4}$ が得られる。

検算

- $\theta=0$ では両方の恒等式が $1=1$ を与える。$\theta=\frac{\pi}{2}$ では、(i) は $1=1$、(ii) は $-1=-1$ を与える。
- p の係数の和は $16-28+13-1=0$ であり、$x=1$ が根であることが確かめられる。
- 数値的には $\frac{1+\sqrt{5}}{4}\approx0.80902=\cos36^\circ$、$\frac{\sqrt{5}-1}{4}\approx0.30902=\cos72^\circ$ であり、p はどちらの点でも（丸め誤差の範囲で）0 になる。

よくある間違い

- $6\theta = -4\theta + 2k\pi$ から得られる解を忘れ、$x = \pm 1$ しか求めない。
- 答えを $\cos\frac{\pi}{5}$ などの形や小数のまま残す。問題は根号を用いた正確な形を求めている。
- $|x| > 1$ となる根がない理由を説明しない。次数を数えれば決着がつく。

STEP のその先へ

$\cos n\theta$ を $\cos\theta$ で表す多項式はチェビシェフ（Chebyshev）多項式（Chebyshev polynomial）T_n である。したがって (i) と (ii) は $T_4(x) = 8x^4 - 8x^2 + 1$ および $T_6(x) = 32x^6 - 48x^4 + 18x^2 - 1$ を述べている。チェビシェフ多項式は数値解析（numerical analysis）において中心的な役割を果たし、その根は多項式補間（polynomial interpolation）に最適な点を与える。$\cos\frac{\pi}{5}$ に $\sqrt{5}$ が現れるのは、正五角形の幾何と黄金比（golden ratio）を反映している。Needham の *Visual Complex Analysis*（『ヴィジュアル複素解析』）は、ド・モアブルの定理や 1 の冪根（roots of unity）を幾何的に眺めるのに最適な一冊である。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。