解答例

STEP I 1989、第 7 問

純粋数学 • 曲線の概形と最適化

> **STEP I 1989、問 7**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/89-s1-q7

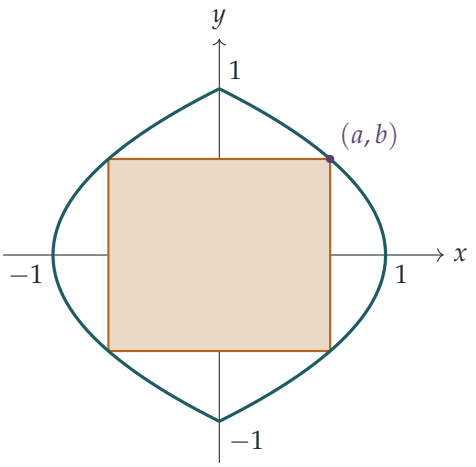
鍵となる考え方

この曲線は両方の座標軸に関して対称（symmetric）であるから、最大の長方形は原点を中心とし、1 つの頂点が第 1 象限（first quadrant）にある曲線上の点となるはずである。これにより、2 変数の探索が 1 変数関数の最大化に帰着する。一般の曲線についても、$|y|$ を $1-|x|$ のべき（power）として解いてしまえば、同じ考え方が通用する。

解答

概形

$y^2 \geq 0$ であるから $1-|x| \geq 0$ でなければならず、$-1 \leq x \leq 1$ である。$x \geq 0$ では曲線は $x = 1-y^2$ であり、これは頂点（vertex）が $(1,0)$ で左に開いた放物線（parabola）である。$x \leq 0$ ではその鏡像 $x = y^2 - 1$ である。2 つの弧は $(0,\pm 1)$ で出会い、そこで角をつくる（傾き $\mathrm{d}y/\mathrm{d}x = \mp\frac{1}{2}$ と $\pm\frac{1}{2}$ が一致しない）。また、$(\pm 1, 0)$ では x 軸と垂直に交わる。この曲線は領域 $|x| + y^2 \leq 1$ を囲む閉曲線であり、角の丸いひし形のような形をしている。



最大の長方形

長方形 $[x_1, x_2] \times [y_1, y_2]$ が領域 $|x| + y^2 \leq 1$ の内部にあるとする。$A = \max(|x_1|, |x_2|)$、$B = \max(|y_1|, |y_2|)$ とおく。頂点は (x_i, y_j) であり、i, j は独立に選べるから、$|x| = A$ かつ $|y| = B$ を同時に満たす頂点が 1 つ存在する。その頂点は領域内にあるので、$A + B^2 \leq 1$ である。すると長方形 $[-A, A] \times [-B, B]$ も領域内にある。実際、$|x| \leq A$、$|y| \leq B$ ならば

$$|x| + y^2 \leq A + B^2 \leq 1.$$

この長方形の幅は $2A \geq x_2 - x_1$、高さは $2B \geq y_2 - y_1$ であるから、元の長方形以上の大きさをもつ。したがって、原点を中心とし頂点が $(\pm a, \pm b)$ の長方形を考えればよく、さらに頂点を曲線に接するまで外側へ押し広げれば、$0 \leq b \leq 1$ として $a = 1 - b^2$ となる。

考えてみよう なぜ原点を中心とする長方形だけを調べれば十分なのだろうか。

それはまさに上の議論のとおりである。各辺を、座標軸からの 2 つの距離のうち大きいほうに置き換えても、長方形は（対称性により）曲線の内部にとどまり、決して小さくならない。

面積は

$$S(b) = 4ab = 4b(1 - b^2) = 4b - 4b^3, \qquad S'(b) = 4 - 12b^2.$$

$S'(b) = 0$ となるのは $b = 1/\sqrt{3}$ のときであり、その前では $S' > 0$、後では $S' < 0$ である。また $S(0) = S(1) = 0$ であるから、これが最大値を与える。このとき $a = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$ であり、

$$S_{\max} = 4 \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{8}{3\sqrt{3}} = \frac{8}{\sqrt{27}},$$

となって、求める結果が得られる。

一般の曲線

今度は $y^{2m} = (1-|x|)^n$ である。左辺は非負であり、n は奇数なので $(1-|x|)^n$ は $1-|x|$ と同符号である。よって再び $|x| \le 1$ であり、（正の）$2m$ 乗根をとると

$$|y| = (1-|x|)^k, \qquad k = \frac{n}{2m} > 0.$$

（もし n が偶数ならば、すべての x が許され、曲線は無限遠へ伸びていくので、最大の長方形は存在しない。これが n が奇数でなければならない理由である。）この曲線もまた $(\pm 1, 0)$ と $(0, \pm 1)$ を通る閉曲線で、両方の座標軸に関して対称であり、$|y| \le (1-|x|)^k$ を囲む。$(1-|x|)^k$ は $|x|$ の増加に伴って減少するから、前と同じ議論により、頂点が $(\pm a, \pm b)$、$b = (1-a)^k$、$0 \le a \le 1$ の長方形を考えればよい。その面積は

$$S(a) = 4a(1-a)^k.$$

微分すると

$$S'(a) = 4(1-a)^{k-1}[(1-a) - ka] = 4(1-a)^{k-1}[1-(1+k)a],$$

となり、これは $0 < a < \frac{1}{1+k}$ で正、$\frac{1}{1+k} < a < 1$ で負である。$S(0) = S(1) = 0$ であるから、最大となるのは $a = \frac{1}{1+k}$ のときであり、このとき $1-a = \frac{k}{1+k}$ である。

$$S_{\max} = \frac{4}{1+k}\left(\frac{k}{1+k}\right)^k = \frac{4k^k}{(1+k)^{k+1}}.$$

$k = \frac{n}{2m}$、$1+k = \frac{n+2m}{2m}$ とすると、$2m$ のべきは $(2m)^{-k} \cdot (2m)^{k+1} = 2m$ とまとまるので、

$$S_{\max} = \frac{8m\, n^{n/(2m)}}{(n+2m)^{(n+2m)/(2m)}} = 8m\left(\frac{n^n}{(n+2m)^{n+2m}}\right)^{1/(2m)}.$$

検算

- $m = n = 1$ とすると $8\left(\frac{1}{27}\right)^{1/2} = 8/\sqrt{27} \approx 1.5396$ となり、前半の結果と一致する。
- $(m,n) = (1,3), (2,1), (2,3), (3,5)$ について $a \in [0,1]$ を細かく探索すると、公式と一致する。たとえば $(m,n) = (2,1)$ では $16/5^{5/4} \approx 2.1400$ となる。中心をずらした長方形を無作為に選んでも、これを上回ることはない。
- n を固定して $m \to \infty$ とすると $k \to 0$ となり、曲線は正方形 $|x| \le 1$、$|y| \le 1$ を満たすように広がる。公式はその正方形の面積 4 に収束（converge）する。

よくある間違い

- 係数 4 を忘れること。頂点 (a, b) が与える長方形は、幅 $2a$、高さ $2b$ である。
- n が奇数であることの意味を無視すること。n が偶数のときは有界な曲線にならない。

STEP のその先へ

$a(1-a)^k$ の最大化は、姿を変えた重み付き相加・相乗平均の不等式（weighted AM–GM inequality）の問題である。$a \cdot \left(\frac{1-a}{k}\right)^k$ を和が一定である $1+k$ 個の因数の積として書けば、微分を使わずに最大値が得られる。曲線 $|x|^p + |y|^q = 1$ は ℓ^p ノルム（norm）の単位球（unit ball）の仲間であり、これらは大学 1 年次の解析学（analysis）や線形代数（linear algebra）に登場する。この種の不等式についてさらに知りたければ Siklos の *Advanced Problems in Mathematics* を、最適化（optimisation）の背後にある解析学については Abbott の *Understanding Analysis* を参照するとよい。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。