解答例

STEP I 1989、第 6 問

純粋数学 ・ 法線と微分方程式

> **STEP I 1989、問 6**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/89-s1-q6

鍵となる考え方

P における法線（normal）の傾き（gradient）は $-1/\mathrm{f}'(x)$ であるから、Q を求めるにはその方程式に $X = 0$ を代入するだけでよい。すると PQ^2 は水平方向の距離の 2 乗と鉛直方向の距離の 2 乗の和となり、与えられた長さの条件は $\mathrm{f}'(x)$ だけについての方程式になる。唯一注意を要するのは最後の平方根であり、どちらの符号を選ぶかは極小点（minimum point）によって決まる。

解答

Q の y 座標

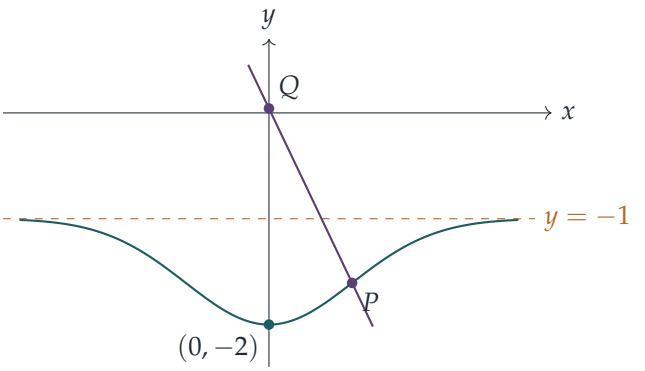
$P = (x, \mathrm{f}(x))$ における接線（tangent）の傾きは $\mathrm{f}'(x)$ であるから、($\mathrm{f}'(x) \neq 0$ であれば) 法線の傾きは $-1/\mathrm{f}'(x)$ である。動点の座標を (X, Y) で表すと、法線の方程式は

$$Y - \mathrm{f}(x) = -\frac{1}{\mathrm{f}'(x)}\,(X - x).$$

$X = 0$ を代入すると、法線は y 軸と

$$Y = \mathrm{f}(x) + \frac{x}{\mathrm{f}'(x)}, \qquad \text{よって} \qquad Q = \left(0,\ \mathrm{f}(x) + \frac{x}{\mathrm{f}'(x)}\right).$$

で交わる。($\mathrm{f}'(x) = 0$ のとき法線は鉛直であり、$x = 0$ でない限り y 軸とは交わらない。)



微分方程式

P と Q の差は水平方向に x、鉛直方向に $x/\mathrm{f}'(x)$ であるから、

$$PQ^2 = x^2 + \frac{x^2}{(\mathrm{f}'(x))^2}.$$

これを $\mathrm{e}^{x^2} + x^2$ に等しいとおくと、x^2 の項が打ち消し合い、

$$\frac{x^2}{(\mathrm{f}'(x))^2} = \mathrm{e}^{x^2}, \qquad \text{すなわち} \qquad \boxed{(\mathrm{f}'(x))^2 = x^2\,\mathrm{e}^{-x^2}.}$$

を得る。これは微分方程式（differential equation）$\mathrm{f}'(x) = \pm x\,\mathrm{e}^{-x^2/2}$ と同値である。

$(0, -2)$ に極小点をもつ曲線

考えてみよう どちらの符号をとるべきか。また、曲線の途中で符号が入れ替わることはありうるか。

f' は連続であり（曲線が極小点をもつので、微分可能であることを仮定している）、$\mathrm{f}'(x)^2 = x^2\mathrm{e}^{-x^2}$ が 0 となるのは $x = 0$ のときだけであるから、f' は $x > 0$ においても $x < 0$ においても符号を変えることができない。符号を変えるには 0 を通過しなければならないからである。$(0, -2)$ が極小点であるためには、f は 0 のすぐ左で減少し、すぐ右で増加していなければならないので、$x < 0$ で $\mathrm{f}'(x) < 0$、$x > 0$ で $\mathrm{f}'(x) > 0$ である。これはちょうど x の符号と一致するから、両側で

$$\mathrm{f}'(x) = x\,\mathrm{e}^{-x^2/2}.$$

である。（全体でマイナスの符号をとると $x = 0$ で極大となり、符号を混ぜると f' の符号が一定となる。すなわち変曲点（point of inflection）となる。）

$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(\mathrm{e}^{-x^2/2}) = -x\,\mathrm{e}^{-x^2/2}$ であるから、積分すると

$$\mathrm{f}(x) = -\mathrm{e}^{-x^2/2} + c.$$

条件 $\mathrm{f}(0) = -2$ より $-1 + c = -2$、よって $c = -1$ であり、求める曲線は

$$\boxed{y = -1 - \mathrm{e}^{-x^2/2}.}$$

である。この曲線は $x = 0$ で最小値 -2 をとり、図のように両側で漸近線（asymptote）$y = -1$ に向かって上昇する。

検算

- $x = 1$ のとき：$\mathrm{f}(1) = -1 - \mathrm{e}^{-1/2} \approx -1.6065$、$\mathrm{f}'(1) = \mathrm{e}^{-1/2} \approx 0.6065$ であるから、$Q \approx (0,\, 0.0422)$、$PQ \approx \sqrt{1 + 1.6487^2} \approx 1.9283$ となり、これは要求どおり $\sqrt{\mathrm{e} + 1}$ に等しい。
- コンピュータで、無作為に選んだ 2000 個の点において法線と y 軸の交点として Q を計算し直したところ、PQ は $\sqrt{\mathrm{e}^{x^2} + x^2}$ と（相対誤差で）10^{-15} 以内で一致した。

よくある間違い

- 法線の傾き $-1/\mathrm{f}'(x)$ の代わりに接線の傾き $\mathrm{f}'(x)$ を使ってしまい、Q を $\mathrm{f}(x) - x\mathrm{f}'(x)$ としてしまう。
- マイナスの符号を捨てる理由を述べずに、平方根を $\mathrm{f}'(x) = x\mathrm{e}^{-x^2/2}$ ととってしまう。

STEP のその先へ

ここでは、曲線上のすべての点についての幾何的な条件が一階微分方程式（first-order differential equation）になったが、そこでは f' が 2 乗の形で現れるため、追加の情報によって分枝が選ばれるまでは解がただ一つに定まらない。このような y' について解かれていない方程式こそ、常微分方程式（ODE）の一意性定理（uniqueness theorem）に注意が必要になり始めるところであり、包絡線（envelope）や特異解（singular solution）へとつながっていく。Boyce と DiPrima による *Elementary Differential Equations*（初等微分方程式）は、一階の方程式と、その解の存在と一意性の理論を扱っている。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。