解答例

STEP I 1989、第 5 問

純粋数学 ・ 二項係数の恒等式

> **STEP I 1989、問 5**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/89-s1-q5

鍵となる考え方

二項展開（binomial expansion）は x についての恒等式（identity）であるから、どんな数を代入しても成り立つ。$x = 1$ を選ぶとすべての係数（coefficient）の和が得られ、$x = -1$ を選ぶと符号を交互に変えた和が得られる。この 2 つを組み合わせると、偶数番目の係数と奇数番目の係数を分離できる。(ii) の重み付きの和については、因子 r が $\binom{n}{r}$ の前に付いているが、これはまさに x^r を微分したときに現れるものである。そこで、展開式を微分してから代入する。

解答

正の整数 n に対して

$$(1+x)^n = \sum_{r=0}^{n} \binom{n}{r} x^r = \binom{n}{0} + \binom{n}{1}x + \binom{n}{2}x^2 + \cdots + \binom{n}{n}x^n,$$

が成り立つ。ここで $\binom{n}{r} = \dfrac{n!}{r!\,(n-r)!}$ である。これはすべての実数 x について成り立つ。

小問 (i)

偶数番目の係数の和を $E = \binom{n}{0} + \binom{n}{2} + \cdots + \binom{n}{n}$、奇数番目の係数の和を $O = \binom{n}{1} + \binom{n}{3} + \cdots + \binom{n}{n-1}$ とおく。n は偶数なので、最後の項 $\binom{n}{n}$ は E に、$\binom{n}{n-1}$ は O に属する。したがって E と O を合わせると、すべての係数がちょうど 1 回ずつ現れる。

展開式に $x = 1$ を代入すると

$$E + O = 2^n.$$

を得る。$x=-1$ を代入すると、偶数乗の $(-1)^r$ は $+1$、奇数乗は -1 となり、一方で左辺は $0^n=0$ となる。これは $n\geq 1$ だからである。よって

$$E-O=0.$$

ゆえに $E=O$ であり、すると $2E=2^n$ となるから

$$E=O=2^{n-1},$$

となり、これが求める結果である。

小問 (ii)

展開式の両辺を x で微分（differentiate）する。定数項は消え、x^r は rx^{r-1} になる：

$$n(1+x)^{n-1}=\binom{n}{1}+2\binom{n}{2}x+3\binom{n}{3}x^2+\cdots+n\binom{n}{n}x^{n-1}.$$

ここで $x=1$ とおくと

$$n2^{n-1}=\binom{n}{1}+2\binom{n}{2}+3\binom{n}{3}+\cdots+n\binom{n}{n},$$

となり、題意が示された。これは奇数か偶数かによらず、すべての正の整数 n について成り立つ。

考えてみよう 小問 (ii) を微積分を使わずに理解する方法はあるだろうか？

ある。$r\binom{n}{r}=r\cdot\dfrac{n!}{r!\,(n-r)!}=n\cdot\dfrac{(n-1)!}{(r-1)!\,(n-r)!}=n\binom{n-1}{r-1}$（ただし $1\leq r\leq n$）であるから、和は $n\sum_{r=1}^{n}\binom{n-1}{r-1}=n\cdot 2^{n-1}$ となる。最後の等号は、$x=1$ を $(1+x)^{n-1}$ の展開式に代入して得られる。言葉で言えば、n 人から任意の人数の委員会を選び、さらにその委員会から委員長を選ぶことは、先に委員長を選び（n 通り）、次に残りの $n-1$ 人の任意の部分集合を選ぶ（2^{n-1} 通り）ことと同じである。

最後の和

和を 2 つに分ける：

$$\sum_{r=0}^{n}(r+(-1)^r)\binom{n}{r}=\sum_{r=0}^{n}r\binom{n}{r}+\sum_{r=0}^{n}(-1)^r\binom{n}{r}.$$

第 1 の和の $r=0$ の項は 0 であるから、第 1 の和はちょうど (ii) の和、すなわち $n2^{n-1}$ である。第 2 の和は $(1+x)^n$ の展開式の $x=-1$ における値、すなわち $(1-1)^n=0$ であり、これはすべての正の整数 n について成り立つ。（これは (i) の $E-O=0$ の段階である。必要なのは $n\geq 1$ だけであり、n が偶数である必要はない。）したがって

$$\boxed{\sum_{r=0}^{n}(r+(-1)^r)\binom{n}{r}=n2^{n-1}.}$$

検算

- $n = 2$ のとき：係数は $1, 2, 1$ であるから、$E = 1 + 1 = 2 = O$ であり、$2^1 = 2$ である。(ii) の和は $2 + 2 \cdot 1 = 4 = 2 \cdot 2^1$ となる。
- $n = 3$ のとき、最後の和は $(0+1) \cdot 1 + (1-1) \cdot 3 + (2+1) \cdot 3 + (3-1) \cdot 1 = 1 + 0 + 9 + 2 = 12 = 3 \cdot 2^2$ となる。
- すべての n（1 から 29 まで）について、3 つの恒等式すべてを厳密に確かめた。たとえば $n = 6$ では $192 = 6 \cdot 2^5$ となる。

よくある間違い

- $\sum (-1)^r \binom{n}{r} = 0$ が奇数の n に対しても成り立つことを忘れ、最終的な答えが n の偶奇（parity）に依存すると考えてしまう。成り立たないのは $n = 0$ のときだけであり、ここでは n は正である。
- (ii) で微分する前に $x = 1$ を代入してしまう。代入は最後に行わなければならない。x が数になってしまえば、もう微分するものは何も残らない。

STEP のその先へ

多項式を係数の貯蔵庫とみなし、代入・微分・乗算によって情報を取り出すという考え方は、**母関数**（generating function）の考え方であり、組合せ論（combinatorics）と確率論における最も強力な道具の一つである。± 1 の代わりに 1 の複素累乗根（complex roots of unity）を代入すると、同じようにして 3 つごと、4 つごとの係数を取り出すことができる。また、確率母関数（probability generating function）を微分すると分布の平均が得られる。これは、ここで $\sum r\binom{n}{r}$ が得られたのとまったく同じである。Grimmett と Welsh の *Probability: An Introduction*（確率論入門）では、母関数が活躍する様子を見ることができる。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。