解答例

STEP I 1989、第 4 問

純粋数学 ・ ラムゼー理論

> **STEP I 1989、問 4**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/89-s1-q4

この問題は、*Beyond STEP* の第 9.2 節「**ミニチュア版ラムゼーの定理**」で詳しく解説されている：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/ch09/ramsey.html

鍵となる考え方

幾何のことは忘れてよい。点についての条件が保証しているのは、どの 3 点も本物の三角形をなすということだけである。したがってこれは、6 点を結ぶ 15 本の辺の彩色（colouring）だけに関する問題である。ヒントに従って、1 つの点に注目する。その点からは 5 本の辺が出ており、色は 2 色しかないので、鳩の巣原理（pigeonhole principle）により、それらのうち少なくとも 3 本は同じ色である。すると、その 3 本の先にある 3 点の間の辺は、最初の点とともに単色の三角形を完成させるか、それ自身で単色の三角形をなすかのどちらかである。

解答

6 点の場合

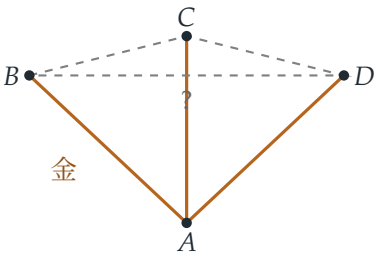
どの 3 点も同一直線上（collinear）にないので、どの 3 点も本物の三角形の頂点となり、その 3 辺は描いた線分の中に含まれている。（どの 4 点も同一平面上（coplanar）にないという条件は、この議論では何の役割も果たさない。）

A から出る 5 本の線分 AB, AC, AD, AE, AF を考える。それぞれは金か銀である。金が高々 2 本、銀も高々 2 本であるとすると、線分は全部で高々 4 本となり、矛盾する。よって、少なくとも 3 本は同じ色である。点 $B, \ldots, F$ の名前を付け替え、必要なら 2 色

の名前を入れ替えることで、

$$AB,\ AC,\ AD \text{ はすべて金である}$$

と仮定してよい。



次に、先端どうしを結ぶ 3 本の線分 BC、CD、DB を見る。

> **考えてみよう** BC、CD、DB がどんな色であっても、以下の 2 つの場合のどちらかで必ず単色の三角形が得られるのはなぜか。

可能性は 2 つしかない。

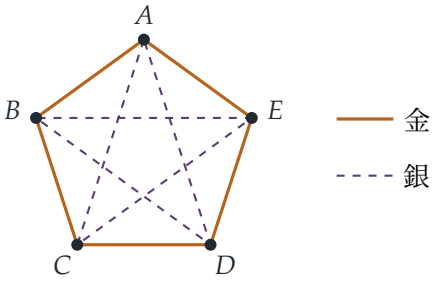
- BC, CD, DB **のうち少なくとも 1 本が金である場合。**それを BC とする（他の場合も文字を入れ替えれば同じである）。すると AB、AC、BC はすべて金なので、三角形 ABC の辺はすべて同じ色である。
- BC, CD, DB **のどれも金でない場合。**このとき 3 本ともすべて銀であり、三角形 BCD の辺はすべて同じ色である。

いずれの場合も、辺がすべて同じ色である三角形が存在する。これが示すべきことであった。

5 点の場合

5 点の場合、各点から出る辺は 4 本しかなく、2 本ずつに分けることができるので、上の議論は成り立たない。この主張が本当に偽であることを示すには、単色の三角形をもたない彩色を 1 つ与えればよい。

点 A, B, C, D, E を五角形の周上に配置する。5 本の辺 AB, BC, CD, DE, EA を金に、5 本の対角線（diagonal）AC, BD, CE, DA, EB（五芒星（pentagram））を銀に塗る。



どの三角形も 5 点のうちの 3 点を使う。五角形の任意の 3 頂点のうち、少なくとも 2 つは隣り合っていない（3 頂点が互いに隣り合うには、5-サイクルの中に三角形が必要になる）。よって、どの三角形も銀の辺をもつ。また、任意の 3 頂点のうち少なくとも 2 つは隣り合っている。実際、3 頂点のどの 2 つも隣り合っていないとすると、五角形を一周したとき、選んだ頂点の間の各すき間には選ばれていない頂点が少なくとも 1 つ含まれることになり、$3+3=6$ 個の点が必要になる。よって、どの三角形も金の辺ももつ。したがって、単色の三角形は存在しない。

考えてみよう 正五角形（regular pentagon）は平面図形なので、その 4 頂点は同一平面上にある。これは一般の位置（general position）に関する規則に反するのではないか。

点が文字どおり平面上にあるならば反する。しかし、この彩色はどの 2 点が結ばれているかだけに依存し、点がどこにあるかには依存しない。頂点を平面からそれぞれ異なる量だけわずかに持ち上げればよい（たとえば $k=0,1,2,3,4$ に対して、k 番目の頂点を高さ $0.3k^2$ まで持ち上げる）。すると、どの 3 点も同一直線上になく、どの 4 点も同一平面上にない。そして上から見れば、図は依然としてここに描いた五角形と五芒星であり、彩色も同じで、単色の三角形はない。

検算

6 点の場合、辺の塗り方は $2^{15}=32768$ 通りしかないので、コンピュータですべて試すことができる。どの塗り方にも単色の三角形があり、実際には常に少なくとも 2 つある。5 点の場合、五角形の彩色について $\binom{5}{3}=10$ 個の三角形をすべて調べると、どれも両方の色をもつことが確かめられる。行列式（determinant）を用いて調べると、上で持ち上げた五角形のどの 4 点も同一平面上にないことが確かめられる。

よくある間違い

- 何を仮定しているのかを述べずに「対称性により」と書くこと。多数派の色をもつ A からの 3 本の辺を選び、その色を金と呼ぶことを明示すべきである。
- A から同じ色の辺が 3 本出ていることだけを示して、そこで止まってしまうこと。第 2 段階、つまり BC、CD、DB を調べることこそが証明の核心である。
- 5 点の場合に、すべての三角形を確認せずに図だけを示すこと。たとえば「A から出る星形を金、それ以外をすべて銀」という彩色はうまくいかない。

STEP のその先へ

これはラムゼー理論（Ramsey theory）の最初の例である。**ラムゼー数**（Ramsey number）$R(3,3)$ とは、完全グラフ（complete graph）K_n の辺をどのように 2 色で塗っても必ず単色の三角形が含まれるような最小の n であり、この問題は $R(3,3) = 6$ であることを示している。ラムゼー（Ramsey）の定理によれば、単色の完全部分グラフの大きさをどのように指定しても、このような数は存在する。しかし、その値を計算するのは恐ろしく難しく、$R(5,5)$ でさえ未解決である。ラムゼーの定理も含むグラフ理論のすばらしい入門書として、Wilson, *Introduction to Graph Theory*（グラフ理論入門）がある。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。