解答例

STEP I 1989、第 3 問

純粋数学 ・ ベクトルと内積

> **STEP I 1989、問 3**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/89-s1-q3

鍵となる考え方

O を原点（origin）とし、すべてを 2 つのベクトル（vector）$\mathbf{a}$ と $\mathbf{b}$ で表す。すると「垂直（perpendicular）」は「内積（scalar product）がゼロ」という条件になる。さらに $\mathbf{a}\cdot\mathbf{a}=\mathbf{b}\cdot\mathbf{b}=1$ であるから、その内積は x、OY、そして唯一の未知数 $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}$ だけで決まる。$OX+OY=1$ を用いると、x と $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}$ を結ぶ 1 本の等式が残る。あとは x がとりうる範囲から不等式が得られる。

解答

条件

O を原点とし、$k=\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}$ とおく。C は A から B へ向かって 3 分の 1 の位置にあり、D は 3 分の 2 の位置にあるから、

$$\overrightarrow{OC}=\mathbf{a}+\tfrac{1}{3}(\mathbf{b}-\mathbf{a})=\tfrac{1}{3}(2\mathbf{a}+\mathbf{b}),\qquad \overrightarrow{OD}=\tfrac{1}{3}(\mathbf{a}+2\mathbf{b}).$$

X は OA 上にあって $OX=x$ であり、$|\mathbf{a}|=1$ であるから、$\overrightarrow{OX}=x\mathbf{a}$ である。同様に、$y=OY=1-x$ として $\overrightarrow{OY}=y\mathbf{b}$ である。よって

$$3\overrightarrow{CY}=(3y-1)\mathbf{b}-2\mathbf{a},\qquad 3\overrightarrow{DX}=(3x-1)\mathbf{a}-2\mathbf{b}.$$

2 直線が垂直であることは、内積がゼロであることと同値である。展開して $\mathbf{a}\cdot\mathbf{a}=\mathbf{b}\cdot\mathbf{b}=1$ を用いると、

$$\begin{aligned}9\overrightarrow{CY}\cdot\overrightarrow{DX}&=(3x-1)(3y-1)k-2(3y-1)-2(3x-1)+4k\\&=k[(3x-1)(3y-1)+4]-2(3x+3y-2).\end{aligned}$$

ここで $x+y=1$ を用いる。すると $3x+3y-2=1$ であり、

$$(3x-1)(3y-1)=9xy-3(x+y)+1=9xy-2.$$

したがって垂直条件は $k(9xy+2)=2$ となる。$y=1-x$ を代入すると

$$\boxed{\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}=\frac{2}{9x(1-x)+2}}$$

である（分母は2以上なので、これで割ってよい）。

範囲

X は長さ1の線分 OA 上にあるから、$0\le x\le 1$ である（このとき $y=1-x$ も $[0,1]$ に入るので、Y は自動的に OB 上にある）。この区間において

$$x(1-x)=\tfrac{1}{4}-(x-\tfrac{1}{2})^2,$$

であるから $0\le x(1-x)\le\frac{1}{4}$ であり、最大値は $x=\frac{1}{2}$ のとき、最小値は $x=0$ または1のときにとる。ゆえに

$$2\le 9x(1-x)+2\le\tfrac{9}{4}+2=\tfrac{17}{4}.$$

逆数（reciprocal）をとると不等号の向きが逆になり（すべて正である）、さらに2を掛けると

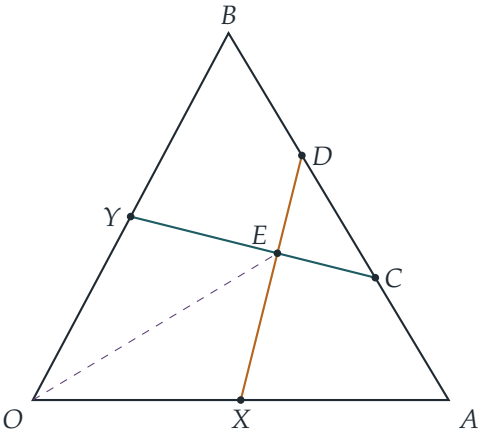
$$\frac{8}{17}\le\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}\le 1,$$

が得られ、示すべきことが示された。（値1となるには $\mathbf{a}=\mathbf{b}$ が必要であり、これは本当の三角形にならないので、実際には $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}<1$ である。それでも与えられた不等式は成り立つ。）

最大の角と OE

考えてみよう なぜ角が最大になるのは $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}$ が最小のときなのだろうか？

$|\mathbf{a}|=|\mathbf{b}|=1$ であるから $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}=\cos A\hat{O}B$ であり、余弦（cosine）は $[0,\pi]$ で減少する。よって角が最大となるのは $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}=\frac{8}{17}$、すなわち $x=\frac{1}{2}$（したがって $y=\frac{1}{2}$）のときである。このとき X と Y はそれぞれ OA と OB の中点（midpoint）であり、角は $\arccos\frac{8}{17}\approx 61.9^\circ$ である。



さて、図全体は $\mathbf{a}$ と $\mathbf{b}$ の入れ替えに関して対称である。この入れ替えで $A \leftrightarrow B$、$C \leftrightarrow D$、$X \leftrightarrow Y$ となるので、直線 CY と DX が入れ替わる。したがって、それらの交点 E は入れ替えによって変わらず、対称軸（line of symmetry）上にある。すなわち、ある t に対して $\overrightarrow{OE} = t(\mathbf{a}+\mathbf{b})$ である。

DX 上の一般の点は

$$\overrightarrow{OX} + s\,\overrightarrow{XD} = \tfrac{1}{2}\mathbf{a} + s(\tfrac{1}{3}\mathbf{a} + \tfrac{2}{3}\mathbf{b} - \tfrac{1}{2}\mathbf{a}) = (\tfrac{1}{2} - \tfrac{s}{6})\mathbf{a} + \tfrac{2s}{3}\mathbf{b}.$$

である。$\mathbf{a}$ と $\mathbf{b}$ は平行でないので、係数を比較（comparing coefficients）できる。これが $\mathbf{a}+\mathbf{b}$ の定数倍となるのは $\frac{1}{2} - \frac{s}{6} = \frac{2s}{3}$ のときであり、$s = \frac{3}{5}$、$t = \frac{2}{5}$ を得る。よって $\overrightarrow{OE} = \frac{2}{5}(\mathbf{a}+\mathbf{b})$ である。最後に

$$|\mathbf{a}+\mathbf{b}|^2 = \mathbf{a}\cdot\mathbf{a} + 2\,\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} + \mathbf{b}\cdot\mathbf{b} = 2 + \tfrac{16}{17} = \tfrac{50}{17},$$

であるから

$$OE = \frac{2}{5}\sqrt{\frac{50}{17}} = \frac{2}{5}\cdot\frac{5\sqrt{2}}{\sqrt{17}} = \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{17}} = \boxed{\frac{2\sqrt{34}}{17}} \approx 0.686.$$

検算

- 座標で考え、$\mathbf{a} = (1,0)$、$\mathbf{b} = (\frac{8}{17}, \frac{15}{17})$ とする。すると $X = (\frac{1}{2}, 0)$、$D = (\frac{11}{17}, \frac{10}{17})$ であるから $\overrightarrow{XD} = (\frac{5}{34}, \frac{10}{17})$ である。また $Y = (\frac{4}{17}, \frac{15}{34})$、$C = (\frac{14}{17}, \frac{5}{17})$ であるから $\overrightarrow{CY} = (-\frac{10}{17}, \frac{5}{34})$ である。これらの内積は $-\frac{50}{578} + \frac{50}{578} = 0$ であり、当然そうなるべきとおりである。
- $E = \frac{2}{5}(\frac{25}{17}, \frac{15}{17}) = (\frac{10}{17}, \frac{6}{17})$ であり、$|OE| = \frac{\sqrt{136}}{17} = \frac{2\sqrt{34}}{17} \approx 0.6860$ である。これは 2 直線の交点を直接数値計算した結果と一致する。

- 値 $s = \frac{3}{5}$ は $[0,1]$ に入っているので、E は確かに X と D の間、つまり三角形の内部にある。

よくある間違い

- $\mathbf{a}\cdot\mathbf{a} = 1$ であることを忘れる（その結果、条件に $|\mathbf{a}|^2$ の項が残ってしまう）、あるいは三等分点（trisection points）を逆にとってしまう。
- 角が最大になるのは $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}$ が最大のときだと考えてしまう。角が大きくなると余弦は小さくなる。
- $x\mathbf{a}$ ではなく $\overrightarrow{OX} = x$ と書いてしまう。点 X はベクトルであり、x はその長さにすぎない。

STEP のその先へ

ここで用いた方法、すなわちすべての点を 2 つの基底ベクトルの組合せとして書き、幾何を内積の計算に置き換える方法は、内積（inner product）とグラム行列（Gram matrix）を扱う出発点である。ベクトルの配置は、その内積の表によって回転を除いて決まる。ここではその表はただ 1、1、$\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}$ である。問題全体がただ 1 つの数に帰着するのはこのためである。ストラング（Strang）の *Introduction to Linear Algebra*（線形代数入門）がこれらの考え方を展開している。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。