解答例

STEP I 1989、第 2 問

純粋数学 ・ リーマン和と極限

> **STEP I 1989、問 2**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/89-s1-q2

鍵となる考え方

この奇妙な式は、長方形の面積の和が姿を変えたものにすぎない。n 個の長方形の面積の合計を直接書き下すと、$k \ln k$ を含む和が得られる。階乗（factorial）の対数は、その同じ和を組み替えたものにほかならない。両者を対応させれば、極限（limit）は積分となり、その値は最初の小問を使って計算できる。

解答

不定積分

$u = \ln x$、$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x} = x$ として部分積分（integration by parts）を行う。このとき $\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} = \frac{1}{x}$、$v = \frac{1}{2}x^2$ であるから、

$$\begin{aligned}\int x \ln x \,\mathrm{d}x &= \tfrac{1}{2}x^2 \ln x - \int \tfrac{1}{2}x^2 \cdot \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x \\ &= \tfrac{1}{2}x^2 \ln x - \tfrac{1}{4}x^2 + C.\end{aligned}$$

積分の値

$\ln(1/x) = -\ln x$ であるから、被積分関数は $-x \ln x$ である。被積分関数は $x = 0$ で定義されないので、$[\varepsilon, 1]$ で積分してから $\varepsilon \to 0^+$ とする：

$$\int_{\varepsilon}^{1} x \ln(1/x)\,\mathrm{d}x = \left[\tfrac{1}{4}x^2 - \tfrac{1}{2}x^2 \ln x\right]_{\varepsilon}^{1} = \tfrac{1}{4} - \tfrac{1}{4}\varepsilon^2 + \tfrac{1}{2}\varepsilon\,(\varepsilon \ln \varepsilon).$$

$\varepsilon \to 0$ のとき、$\varepsilon^2 \to 0$ であり、また（与えられた事実により）$\varepsilon \ln \varepsilon \to 0$ であるから、

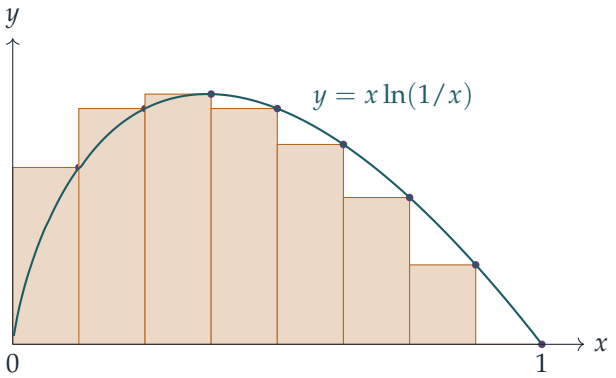
$$\int_0^1 x \ln(1/x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{4}.$$

同じ事実から、$x \to 0^+$ のとき $f(x) = x\ln(1/x)$ は 0 に近づくことがわかる。よって $f(0) = 0$ と定めれば、f は $[0,1]$ 全体で連続（continuous）になる。曲線は 0 から上昇して $x = \frac{1}{\mathrm{e}}$（ここで $f'(x) = -\ln x - 1 = 0$）で最大値 $\frac{1}{\mathrm{e}}$ をとり、$x = 1$ で再び 0 に戻る。

長方形

$[0,1]$ を幅 $\frac{1}{n}$ の n 個の帯に分ける。k 番目の帯は $[\frac{k-1}{n}, \frac{k}{n}]$ であり、その長方形は右上の頂点が曲線上にあるので、高さは

$$f\left(\frac{k}{n}\right) = \frac{k}{n}\ln\frac{n}{k} = \frac{k}{n}(\ln n - \ln k).$$



したがって、長方形の面積の合計は

$$\begin{aligned} S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n}\cdot\frac{k}{n}(\ln n - \ln k) &= \frac{\ln n}{n^2}\sum_{k=1}^{n} k - \frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n} k\ln k \\ &= \frac{\ln n}{n^2}\cdot\frac{n(n+1)}{2} - \frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n} k\ln k \\ &= \frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{n}\right)\ln n - \frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n} k\ln k. \end{aligned}$$

第 1 項は、求める式とすでに一致している。

考えてみよう 階乗はどこから現れるのだろうか？

$0 \le m \le n-1$ に対して、

$$\ln\frac{n!}{m!} = \ln((m+1)(m+2)\cdots n) = \sum_{k=m+1}^{n} \ln k.$$

これを $m = 0, 1, \ldots, n-1$ について足し合わせ、各 $\ln k$ が何回現れるかを数える。項 $\ln k$ が含まれるのは $m+1 \le k$ のとき、すなわち $m = 0, 1, \ldots, k-1$ のときに限られる

ので、ちょうど k 回である。よって

$$\ln\frac{n!}{0!}+\ln\frac{n!}{1!}+\cdots+\ln\frac{n!}{(n-1)!}=\sum_{k=1}^{n}k\ln k.$$

（たとえば $n=3$ のとき、$\ln 6+\ln 6+\ln 3=\ln 1+2\ln 2+3\ln 3$ であり、両辺とも $\ln 108$ に等しい。）したがって、問題の式はちょうど S_n、すなわち n 個の長方形の面積に等しい。

極限

$n\to\infty$ のとき、長方形は曲線にますますよく沿うようになり、f は $[0,1]$ で連続であるから、その面積の合計は曲線の下の面積に近づく。したがって

$$\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{n}\right)\ln n-\frac{1}{n^2}\left[\ln\frac{n!}{0!}+\ln\frac{n!}{1!}+\cdots+\ln\frac{n!}{(n-1)!}\right]=S_n\to\int_0^1 x\ln(1/x)\,\mathrm{d}x=\frac{1}{4},$$

となり、示すべきことが示された。

「長方形が曲線にますますよく沿う」よりも確かな根拠が欲しければ、次のような評価がある。各帯において、長方形の面積と曲線の下の面積の差は、高々、その帯の上で f が変化する量の $\frac{1}{n}$ 倍である。この変化量をすべての帯について足し合わせる。f は $\frac{1}{\mathrm{e}}$ だけ上昇し、$\frac{1}{\mathrm{e}}$ だけ下降して戻るので、合計は高々 $\frac{2}{\mathrm{e}}$ である。よって $|S_n-\frac{1}{4}|\le\frac{2}{\mathrm{e}n}\to 0$ となる。

検算

- 最初の小問の答えを微分する：$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{1}{2}x^2\ln x-\frac{1}{4}x^2\right)=x\ln x+\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}x=x\ln x$。
- $n=2$ のとき、式の値は $\frac{3}{4}\ln 2-\frac{1}{4}(\ln 2+\ln 2)=\frac{1}{4}\ln 2\approx 0.173$ であり、これは 2 つの長方形の面積 $\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\ln 2+\frac{1}{2}\cdot 0$ に等しい。
- 数値的には、式の値は $n=10$ で約 0.24559、$n=100$ で約 0.249937、$n=1000$ で約 0.2499992 であり、$\frac{1}{4}$ に近づいていく。

よくある間違い

- 符号を見落とす：被積分関数は $x\ln(1/x)=-x\ln x$ であるから、最初の小問で求めた原始関数（antiderivative）の符号を反転させなければならず、面積は $-\frac{1}{4}$ ではなく $+\frac{1}{4}$ である。
- $\frac{1}{2}n(n+1)$ ではなく $\sum k=\frac{1}{2}n^2$ と書いてしまう：そうすると括弧の中の $\frac{1}{n}$ が消えてしまう。

- 積分が 0 で広義積分（improper integral）であることを忘れる：下端の処理には $x \ln x \to 0$ という事実が必要であり、これは問題文で与えられている。

STEP のその先へ

長方形の和はリーマン（Riemann）和（Riemann sum）であり、閉区間上のあらゆる連続関数についてそれが積分に収束（converge）するという事実は、大学の解析学の講義で最初に出会う大きな定理の一つである。f の上昇と下降の合計を用いた先ほどの評価は、**有界変動**（bounded variation）関数という考え方そのものである。逆向きに見れば、この問題は $\sum k \ln k$ についての情報も与えてくれる。これは超階乗（hyperfactorial）$1^1 2^2 \cdots n^n$ と密接に関係する量であり、その増大の様子は、$n!$ に対するスターリング（Stirling）の公式と同じ発想で、より精密に求めることができる。Abbott の *Understanding Analysis*（解析学入門書）は、リーマン積分を丁寧に展開している。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。